А. А. ЧУПРЫГІН

МАТЭМАТЫЧНЫ АНАЛІЗ: ФУНКЦЫЙНЫЯ ШЭРАГІ

*Вучэбна-метадычны дапаможнік
па аднайменнаму курсу
для студэнтаў фізічнага факультэта*

МІНСК
БДУ
1998

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.162я73
Ч 92

Р э ц э н з е н т

доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар *Л. М. Баркоўскі*

Разгледжана і рэкамендавана да выдання
рэдакцыйна-выдавецкім саветам Белдзяржуніверсітэта

Чупрыгін А. А.

Ч 92 Матэматычны аналіз: функцыйныя шэрагі: Вучэб.-метад. дапам. па аднаймен. курсу для студэнтаў фізіч. фак. — Мн.: Белдзяржуніверсітэт, 1998. — 95 с.

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.162я73

ФУНКЦЫЙНЫЯ ШЭРАГІ

Зараз мы будзем разглядаць функцыйныя шэрагі, г.зн. такія шэрагі, складнікамі якіх з'яўляюцца функцыі. Менавіта функцыйныя шэрагі, а таксама функцыйныя паслядоўнасці, маюць асабліва важнае значэнне як у тэарэтычных даследаваннях, так і ў шматлікіх практычных дастасаваннях.

Асноўным пытаннем, на якім засяроджваюць увагу пры разглядзе лікавых шэрагаў, з'яўляецца пытанне аб іх збежнасці. Пры даследаванні функцыйных шэрагаў нас будзе цікавіць не толькі сам факт іх збежнасці, інакш кажучы, існаванне сумы шэрагу, а і функцыйныя ўласцівасці гэтай сумы, напрыклад, яе непарыўнасць, інтэгравальнасць, дыферэнцавальнасць. Як мы ўбачым далей, функцыйныя ўласцівасці сумы збежнага шэрагу істотна залежаць не толькі ад адпаведных уласцівасцей яго складнікаў, а і ад характару збежнасці гэтага шэрагу. У адрозненне ад лікавых шэрагаў для функцыйных шэрагаў, а таксама для функцыйных паслядоўнасцей, акрамя простай збежнасці разглядаюць яшчэ адзін тып збежнасці, так званую раўнамерную збежнасць. Гэтае даволі тонкае паняцце і будзе ніжэй падрабязна разгледжана. Мы ўпэўнімся, што функцыйныя ўласцівасці сумы шэрагу ў значнай меры абумоўліваюцца менавіта раўнамернай збежнасцю шэрагу.

1. ЗБЕЖНАСЦЬ ФУНКЦЫЙНЫХ ПАСЛЯДОЎНАСЦЕЙ І ШЭРАГАЎ

Няхай на некаторым мностве дадзена паслядоўнасць функцый

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

Калі зафіксаваць x, то функцыйная паслядоўнасць $(f_n(x))$ становіцца лікавай паслядоўнасцю, яна можа збягацца, можа разбягацца. Паслядоўнасць $(f_n(x))$ называецца збежнай на мностве X, калі пры любым фіксаваным $x_0 \in X$ збягаецца лікавая

паслядоўнасць $(f_n(x_0))$.

Калі функцыйная паслядоўнасць $(f_n(x))$ збягаецца на мностве X, то функцыя $f(x)$, якая вызначаецца пры кожным $x \in X$ роўнасцю

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

называецца лімітам функцыйнай паслядоўнасці, або лімітавай функцыяй.

Зразумела, што лімітавая функцыя $f(x)$ паслядоўнасці $(f_n(x))$ вызначана толькі на мностве збежнасці паслядоўнасці, якое звычайна вузей, чым абсяг вызначэння функцый $f_n(x)$.

Аналагічным чынам разглядаюць функцыйны шэраг

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad \text{або} \quad \sum u_k(x),$$

складнікі якога $u_k(x)$ ёсць функцыі з некаторым абсягам вызначэння.

Суму n першых складнікаў шэрагу

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

называюць n-й частковай сумай функцыйнага шэрагу.

Шэраг $\sum u_k(x)$ называецца збежным на мностве X, калі паслядоўнасць яго частковых сум $(S_n(x))$ збягаецца на гэтым мностве. Ліміт частковых сум

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \quad x \in X$$

называюць сумай функцыйнага шэрагу і запісваюць

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x).$$

Такім чынам, сумай збежнага шэрагу з'яўляецца функцыя $S(x)$, якая вызначана на мностве збежнасці шэрагу.

Як і для лікавых шэрагаў разглядаюць n-ю астачу функцыйнага шэрагу — шэраг $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}(x)$ (або $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$), суму якога (у выпадку збежнасці) абазначаюць $r_n(x)$:

$$r_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}(x), \quad x \in X.$$

Мае месца роўнасць

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x), \quad x \in X.$$

Функцыйны шэраг $\sum u_k(x)$ называецца абсалютна збежным на мностве X, калі на гэтым мностве збягаецца шэраг $\sum |u_k(x)|$.

Істотная заўвага. Збежнасць функцыйных паслядоўнасцей і функцыйных шэрагаў вызначаецца праз збежнасць адпаведных лікавых паслядоўнасцей і шэрагаў, паколькі зменная x фіксуецца. Гэта дазваляе нам пры даследаванні збежнасці функцыйных шэрагаў і паслядоўнасцей скарыстоўваць тыя ж метады, якія прымяняліся пры даследаванні збежнасці лікавых шэрагаў і паслядоўнасцей. Напрыклад, паводле прыметы Кашы, калі існуе

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = q(x),$$

то для ўсіх x, якія задавальняюць умову $q(x) < 1$, шэраг абсалютна збягаецца; для ўсіх x, якія задавальняюць умову $q(x) > 1$, — шэраг разбягаецца; пры $q(x) = 1$ патрабуецца дадатковае даследаванне.

Прыклад 1. Знайсці абсяг збежнасці шэрагу

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k.$$

△ Будзем карыстацца прыметай Даламбера ў лімітавай форме. Знойдзем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}/(n+1)}{x^n/n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x|$$

Тады пры $|x| < 1$ шэраг збягаецца (нават абсалютна); пры $|x| > 1$ шэраг разбягаецца; дадатковае даследаванне патрабуецца пры $|x| = 1$. Значэнню $x = 1$ адпавядае разбежны шэраг $\sum 1/k$. Пры $x = -1$ атрымаем шэраг $\sum (-1)^k/k$, які збягаецца паводле прыметы Лейбніца.

Такім чынам, абсягам збежнасці шэрагу $\sum x^k/k$ будзе прамежак $-1 \le x < 1$ ▲

Прыклад 2. Знайсці лімітавую функцыю паслядоўнасці $f_n(x) = x^n$.

△ Відавочна, што паслядоўнасць $f_n(x) = x^n$ збягаецца на прамежку $-1 < x \le 1$, прычым лімітавая функцыя

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{калі } -1 < x < 1, \\ 1, & \text{калі } x = 1 \end{cases}$$ ▲

Прыклад 3. Даследаваць збежнасць і знайсці суму шэрагу

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \cdots + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}} + \cdots$$

△ Пры $x = 0$ шэраг збягаецца, таму што ўсе яго складнікі роўныя нулю, прычым, відавочна, сума шэрагу $S(0) = 0$.

Пры $x \neq 0$ дадзены шэраг уяўляе сабою бясконцую геаметрычную прагрэсію з назоўнікам $q = \frac{1}{1+x^2}$. Калі $x \neq 0$, то $0 < q < 1$, значыць, шэраг будзе збягацца і яго сума

$$S(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2$$

Такім чынам, шэраг збягаецца пры ўсіх x і мае суму

$$S(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{калі } x \neq 0 \\ 0, & \text{калі } x = 0 \end{cases}$$ ▲

Заўвага. Апошнія два прыклады паказваюць, што лімітавая функцыя $f(x)$ паслядоўнасці $(f_n(x))$ і сума $S(x)$ функцыйнага шэрагу $\sum U_k(x)$ могуць быць разрыўнымі функцыямі, нягледзячы на тое, што элементы паслядоўнасці $f_n(x) = x^n$ і складнікі шэрагу $U_k(x) = x^2/(1+x^2)^{k-1}$ з'яўляюцца непарыўнымі пры ўсіх x. Прычыны гэтай анамальнай з'явы ўпершыню былі даследаваны Стоксам, Зайдэлем (1847-1848), а затым Кашы (1853) і Вейерштрасам; зрэшты, прыватны выпадак гэтай з'явы яшчэ раней разглядаў Абель (1826). Варта адзначыць, што матэматыкі пачатку дзевятнаццатага стагоддзя занадта доўга знаходзіліся ў палоне памылковага сцвярджэння: "Тое, што праўдзіцца да ліміту, праўдзіцца і ў лімiце". Аднак не ўсе ўласцівасці, якімі валодаюць элементы функцыйнай паслядоўнасці або складнікі шэрагу, аўтаматычна пераносяцца на лімітавую функцыю або, адпаведна, суму шэрагу.

Мы пакажам ніжэй, што, напрыклад, непарыўнасць лімітавай функцыі функцыйнай паслядоўнасці, а таксама і сумы функцыйнага шэрагу, звязаны з характарам іх збежнасці, дакладней, з так званай раўнамернай збежнасцю.

Практыкаванні.

Знайдзіце абсяг збежнасці наступных шэрагаў:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k}$, б) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$, в) $\sum_{k=0}^{\infty} k!\, x^k$, г) $\sum_{k=1}^{\infty} k^x$

д) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}$; е) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$, ж) $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k\cdot 3^k$.

2. РАЎНАМЕРНАЯ ЗБЕЖНАСЦЬ ФУНКЦЫЙНЫХ ПАСЛЯДОЎНАСЦЕЙ

2.1. Азначэнне раўнамернай збежнасці паслядоўнасці

Няхай паслядоўнасць $(f_n(x))$ збягаецца на мностве X да лімітавай функцыі $f(x)$. Сімвалічны запіс азначэння збежнасці на мностве X паслядоўнасці $(f_n(x))$ выглядае наступным чынам:

$$\forall x\in X \quad \forall \varepsilon>0 \quad \exists N \quad \forall n>N \implies |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \qquad (1)$$

Паколькі паслядоўнасць збягаецца на мностве X , то для кожнага $x\in X$ існуе, увогуле кажучы, свой лік N такі, што пры $\forall n>N$ выконваецца няроўнасць (1) . Такім чынам, лік N , які знаходзяць шляхам развязвання няроўнасці (1) адносна n , залежыць не толькі ад ε , а і ад x . Гэтую залежнасць абазначым так: $N=N(\varepsilon,x)$. Узнікае пытанне: ці існуе лік $N=N(\varepsilon)$, які залежыць толькі ад ε , такі, што $\forall n>N(\varepsilon)$ няроўнасць $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ выконваецца адначасова для ўсіх $x\in X$? Пры станоўчым адказе на гэтае пытанне гавораць аб раўнамернай збежнасці паслядоўнасці на мностве X . На першы погляд можа здацца, што такое $N=N(\varepsilon)$ заўсёды можна знайсці, паколькі для любога $x\in X$ сваё N існуе. Аднак, як мы пакажам ніжэй, здараюцца выпадкі, калі нельга знайсці $N(\varepsilon)$, каб няроўнасць $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ задавальнялася адначасова для ўсіх $x\in X$. У гэтых выпадках гавораць аб нераўнамернай збежнасці паслядоўнасці $(f_n(x))$ на мностве X .

Азначэнне 1. Функцыйная паслядоўнасць $(f_n(x))$ называецца раўнамерна збежнай да функцыі $f(x)$ на мностве X,

калі
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \quad \forall n > N \quad \forall x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Калі паслядоўнасць $(f_n(x))$ раўнамерна збягаецца да функцыі $f(x)$ на мностве X, то будзем запісваць: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X.

Падкрэслім, што раўнамерная збежнасць ёсць уласцівасць, якая асацыіруецца з мноствам пунктаў. Адна і тая збежная паслядоўнасць можа збягацца раўнамерна на адным мностве і нераўнамерна на другім.

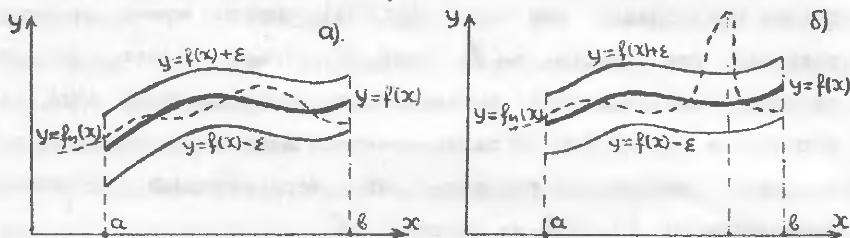
Відавочна, што з умовы $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X, вынікае збежнасць паслядоўнасці да $f(x)$ на гэтым мностве.

Паняцце "раўнамерная збежнасць" упершыню паявілася ў знакамітай рабоце Стокса (1849) "Аб крытычных значэннях сум перыядычных шэрагаў".

Азначэнне 2. Няхай $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ на X. Паслядоўнасць $(f_n(x))$ нераўнамерна збягаецца да функцыі $f(x)$ на мностве X (абазначаюць $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ на X), калі
$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N \quad \exists \tilde{x} \in X \Rightarrow |f_n(\tilde{x}) - f(x)| \geq \varepsilon_0$

2.2. Геаметрычны сэнс раўнамернай збежнасці паслядоўнасці

Няхай $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a, b]$. Тады $\forall \varepsilon > 0$, пачынаючы з некаторага нумара, будзе выконвацца няроўнасць $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$ для ўсіх $x \in [a, b]$. Гэта значыць, што для ўсіх $x \in [a, b]$ графікі функцый $y = f_n(x)$ не выходзяць з ε - паласы, якая акружае графік лімітавай функцыі $y = f(x)$ (рыс. 1а).



Рыс. 1.

Калі ж $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ на $[a, b]$, то існуе ε - паласа, якая

акружае графік лімітавай функцыі $y=f(x)$, такая, што $\forall N$ знойдзецца нумар $n>N$ і пункт $\tilde{x}\in[a,b]$ такія, што графік функцыі $y=f_n(x)$ выйдзе з гэтай ε – паласы ў пункце $\tilde{x}$. Інакш кажучы, графік функцыі $y=f_n(x)$ утварае ў акрузе пункта $\tilde{x}$ горб, які выступае з вызначанай ε – паласы (рыс. 1б).

Калі нумар n павялічваецца, гэты горб зусім знікнуць не можа, але ён павінен ссоўвацца ўправа або ўлева, паколькі для любога фіксаванага $x\in[a,b]$ рознасць $|f_n(x)-f(x)|$ імкнецца да нуля пры $n\to\infty$. У сувязі з гэтым гавораць, што нераўнамерная збежнасць ёсць "феномен рухаючайся хвалі".

<u>Прыклад 1.</u> Даказаць раўнамерную збежнасць на $[1,2]$ паслядоўнасці
$$f_n(x)=\frac{1}{1+nx}.$$

$\triangle$ Знаходзім лімітавую функцыю:
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+nx}=0.$$
Развязваем адносна n няроўнасць $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.
Маем
$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{1}{1+nx}-0\right|=\frac{1}{1+nx}<\varepsilon.$$
А тады $1+nx>1/\varepsilon$, значыць $n>\frac{1/\varepsilon-1}{x}$. Такім чынам, у якасці $N(\varepsilon,x)$ можна ўзяць $N(\varepsilon,x)=\frac{1/\varepsilon-1}{x}$. Паколькі для ўсіх $x\in[1,2]$
$N(\varepsilon,x)=\frac{1/\varepsilon-1}{x}\le\frac{1}{\varepsilon}-1$, то ў якасці велічыні $N(\varepsilon)$, якая не залежыць ад x, можна ўзяць $N(\varepsilon)=1/\varepsilon-1$.

Канчаткова атрымліваем:
$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}-1\quad\forall n>N(\varepsilon)\quad\forall x\in[1,2]\Longrightarrow|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{1+nx}<\varepsilon,$$
а гэта і азначае, што $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ на $[1,2]$. ▲

<u>Прыклад 2.</u> Даказаць, што паслядоўнасць $f_n(x)=\frac{1}{1+nx}$ збягаецца нераўнамерна на прамежку $(0,2]$.

$\triangle$Відавочна, што $\forall x\in(0,2]$
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+nx}=0.$$
Дакажам, што $f_n(x)\not\rightrightarrows 0$ на $(0,2]$. Гэта азначае, што
$$\exists\varepsilon_0>0\quad\forall N\quad\exists n>N\quad\exists\tilde{x}\in(0,2]\Longrightarrow|f_n(\tilde{x})-f(\tilde{x})|=\frac{1}{1+n\tilde{x}}\geqslant\varepsilon_0.$$
Сапраўды, возьмем $\varepsilon_0=1/3>0$. Тады, які б нумар n ні ўзяць,

існуе пункт $\tilde{x} = \frac{1}{n} \in (0,2]$, такі, што

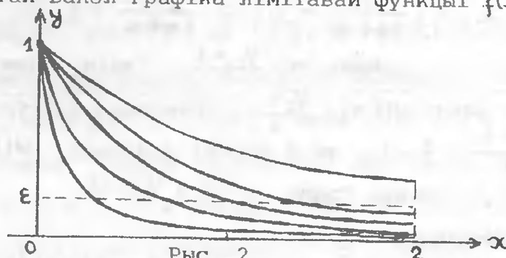
$$|f_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| = \frac{1}{1+n\tilde{x}} = \frac{1}{2} \geq \varepsilon_0 .$$

Такім чынам, $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ на $(0,2]$.

Заўважым, што пункт $\tilde{x}$ залежыць ад n , прычым, $\tilde{x}$ імкнецца да нуля, калі $n \to \infty$.

Можна было правесці доказ і іншым спосабам. З няроўнасці $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, як і ў папярэднім прыкладзе, атрымліваецца $N(\varepsilon,x) = \frac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{x}$. У дадзеным выпадку выбраць $N = N(\varepsilon)$, адначасова прыгоднае для ўсіх $x \in (0,2]$, ужо нельга, таму што, калі x імкнецца да нуля, то $N(\varepsilon, x) = \frac{1/\varepsilon - 1}{x} \longrightarrow +\infty$. ▲

Нераўнамерная збежнасць паслядоўнасці $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ на прамежку $(0,2]$, таксама як і раўнамерная збежнасць на адрэзку $[1,2]$, становіцца зразумелай, калі звярнуцца да графікаў функцый $y = f_n(x)$. Крывыя $y = f_n(x)$ на прамежку $(0,2]$ з ростам n усё цясней прыціскаюцца да восі OX . Аднак паколькі $f_n(0) = 1 \quad \forall n$, то пры любым n графік функцыі $y = f_n(x)$ выйдзе з ε - паласы $(0<\varepsilon<1)$, узятай вакол графіка лімітавай функцыі $f(x) = 0$ (рыс. 2).



Рыс. 2.

2.3. Асноўныя этапы доказу раўнамернай збежнасці паслядоўнасці паводле азначэння

Каб даследаваць на раўнамерную збежнасць паслядоўнасць $(f_n(x))$ $x \in X$, карыстаючыся толькі азначэннем, паступаюць наступным чынам:

1. Знаходзяць лімітавую функцыю $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in X$.

2. Запісваюць няроўнасць $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ і развязваюць яе адносна n , атрымліваюць развязак у выглядзе $n > N(\varepsilon, x)$.

3. Выбіраюць $N(\varepsilon)$, калі гэта магчыма, так, каб $\forall x \in X$ мела месца няроўнасць $N(\varepsilon) \geq N(\varepsilon, x)$. Калі такое $N(\varepsilon)$ не існуе, то збежнасць нераўнамерная.

Практыкаванні.

1. Дакажыце, карыстаючыся азначэннем, раўнамерную збежнасць функцыйных паслядоўнасцей $(f_n(x))$ на дадзеных мноствах X:

а) $f_n(x) = x^n$, $X = [0, 1/2]$, в) $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$, $X = [0, +\infty)$,

б) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$, $X = [0, 1]$, г) $f_n(x) = \frac{nx^2-1}{nx}$, $X = [1, 2]$.

2. Дакажыце, карыстаючыся азначэннем, што наступныя паслядоўнасці $(f_n(x))$ збягаюцца нераўнамерна на мностве X

а) $f_n(x) = x^n$, $X = (0, 1]$,

б) $f_n(x) = 2n^2 x \cdot e^{-n^2 x}$, $X = [0, 1]$,

в) $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}$, $X = [0, 1]$,

г) $f_n(x) = \frac{nx^2 - 1}{nx}$, $X = (0, 1]$.

2.4. Прыметы раўнамернай збежнасці функцыйных паслядоўнасцей

Пры даследаванні функцыйных паслядоўнасцяў на раўнамерную збежнасць прымяняюць акрамя азначэння дастатковыя, неабходныя і дастатковыя прыметы. Вызначым некаторыя з гэтых прымет.

Прымета Вейерштраса. Калі існуе лікавая паслядоўнасць (a_n) такая, што $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ і, пачынаючы з некаторага нумара, $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ $\forall x \in X$, то $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X

Крытэрый раўнамернай збежнасці. Для таго, каб $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X, неабходна і дастаткова, каб

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$$

Крытэрый Кашы. Для таго, каб $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X, неабходна і дастаткова, каб
$\forall \varepsilon>0 \; \exists N(\varepsilon) \in N \; \forall n>N(\varepsilon) \; \forall p \in N \; \forall x \in X \Rightarrow |f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon.$

2.5. Уласцівасці раўнамерна збежных паслядоўнасцей

Тэарэма 1. Калі функцыі $f_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$ непарыўныя на мностве X і $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X, то $f(x)$ таксама непарыўная на X

Тэарэма 2. Калі функцыі $f_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$ інтэгравальныя на адрэзку $[a,b]$ і $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на гэтым адрэзку, то $f(x)$ будзе таксама інтэгравальнай на $[a,b]$ і

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

або, інакш кажучы,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Тэарэма 3. Калі функцыі $f_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$ дыферэнцавальныя на $[a,b]$ і паслядоўнасць $(f_n(x))$ збягаецца ў некаторым пункце $x_0 \in [a,b]$, а паслядоўнасць вытворных $(f_n'(x))$ раўнамерна збягаецца на $[a,b]$, тады, па-першае, паслядоўнасць $(f_n(x))$ раўнамерна збягаецца на $[a,b]$ $(f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a,b])$, па-другое, лімітавая функцыя $f(x)$ дыферэнцавальная на гэтым адрэзку, прычым $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$

або

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'.$$

Мы пакажам ніжэй (п. 2.6), што патрабаванне раўнамернай збежнасці ў тэарэмах 1,2,3 з'яўляецца істотнай умовай для выканання сцвярджэнняў тэарэм, аднак гэтае патрабаванне не з'яўляецца неабходным.

Каб праілюстраваць практычнае прымяненне прыметаў збежнасці функцыйных паслядоўнасцей разгледзім некалькі прыкладаў.

Прыклад 3. Даказаць, што паслядоўнасць $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ раўнамерна збягаецца на прамежку $(0, 1/2]$.

Δ 1 спосаб (паводле азначэння раўнамернай збежнасці).

Знаходзім лімітавую функцыю:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n/(1+x^n) = 0, \quad x \in (0, 1/2]$$

Развязваем адносна n няроўнасць $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. Маем

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{x^n}{1+x^n} - 0\right| = \frac{x^n}{1+x^n} < \varepsilon$$

Відавочна, што $\frac{x^n}{1+x^n} < 1$, $x \in (0, \frac{1}{2}]$, таму будзем лічыць $\varepsilon < 1$.

Тады, развязаўшы няроўнасць, атрымаем для ўсіх $x \in (0, 1/2]$

$$n > \frac{\ln \varepsilon/(1-\varepsilon)}{\ln x} \geqslant \frac{\ln \varepsilon/(1-\varepsilon)}{\ln 1/2}$$

Такім чынам,

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon/(1-\varepsilon)}{\ln 1/2} \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \forall x \in (0, \frac{1}{2}] \Rightarrow |f_n(x)-f(x)| = \frac{x^n}{1+x^n} < \varepsilon$,

г. зн. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $(0, 1/2]$.

Заўважым, што мы маглі б спрасціць выкладкі, калі б у самым пачатку ўзмацнілі няроўнасць, запісаўшы:

$$|f_n(x)-f(x)| = \frac{x^n}{1+x^n} < x^n, \quad x \in (0, 1/2]$$

Тады, развязваючы больш простую няроўнасць $x^n < \varepsilon$, атрымліваем для ўсіх $x \in (0, 1/2]$

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \geqslant \frac{\ln \varepsilon}{\ln 1/2} \qquad (\varepsilon < 1).$$

Такім чынам, у якасці $N(\varepsilon)$ можна ўзяць $N(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln 1/2}$. Гэты прыём спрашчэння выкладак шляхам узмацнення няроўнасці $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ даволі часта выкарыстоўваюць на практыцы.

2 спосаб (паводле прыметы Вейерштраса).

Відавочна, што $\forall x \in (0, 1/2]$ выконваецца няроўнасць

$$|f_n(x)-f(x)| = \frac{x^n}{1+x^n} < x^n \leq 1/2^n .$$

Няхай $a_n = 1/2^n$. Паколькі $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1/2^n = 0$, то паводле прыметы Вейерштраса $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $(0, 1/2]$.

3 спосаб (паводле крытэрыю раўнамернай збежнасці)

Знойдзем спачатку $\sup|f_n(x)-f(x)|$ на прамежку $(0, 1/2]$.

Паколькі вытворная

$$\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)' = \frac{n x^{n-1}}{(1+x^n)^2} > 0 \qquad \text{пры} \quad x \in (0, 1/2],$$

то выраз $|f_n(x)-f(x)| = \frac{x^n}{1+x^n}$ нарастае на прамежку $(0, 1/2]$, значыць,

$$\sup_{x\in(0,1/2]} |f_n(x)-f(x)| = \frac{(1/2)^n}{1+(1/2)^n}.$$

Такім чынам,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup|f_n(x)-f(x)|\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(1/2)^n}{1+(1/2)^n}=0,$$

значыць, умовы крытэрыя задавальняюцца, адкуль вынікае, што

$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $(0, 1/2]$

4 спосаб (паводле крытэрыю Кашы раўнамернай збежнасці).

Ацэнім велічыню $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|$. Маем для ўсіх $x\in(0, 1/2]$:

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|=\left|\frac{x^{n+p}}{1+x^{n+p}}-\frac{x^n}{1+x^n}\right|=\left|\frac{x^n(x^p-1)}{(1+x^{n+p})(1+x^n)}\right|\leq x^n\leq(1/2)^n.$$

Відавочна, што пры $n>\log_{1/2}\varepsilon$ будзе выконвацца няроўнасць $\left(\frac{1}{2}\right)^n<\varepsilon$, а, значыць, і $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon \quad \forall x\in(0,1/2], \quad \forall p\in N$.

Такім чынам, мы атрымалі, што

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon)=\log_{1/2}\varepsilon \quad \forall n>N(\varepsilon) \quad \forall p\in N \quad \forall x\in(0,\tfrac{1}{2}]\Rightarrow|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon,$$

г. зн. умовы крытэрыю Кашы задавальняюцца.

Заўважым, што ў крытэрыі Кашы не выкарыстоўваецца лімітавая функцыя, вось чаму яго можна прымяняць без папярэдняга знаходжання $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. ▲

Прыклад 4. Даказаць, што паслядоўнасць $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$ збягаецца нераўнамерна на адрэзку $[1/2, 1]$.

Δ1 спосаб (паводле азначэння нераўнамернай збежнасці).

Знаходзім лімітавую функцыю

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\begin{cases}0, & \text{калі } x\in[1/2,1),\\ 1, & \text{калі } x=1.\end{cases}$$

Відавочна, што $\forall n$ пункт $\tilde{x}=\sqrt[n]{1/2}$ належыць інтэрвалу $(\frac{1}{2}, 1)$ і ў сваю чаргу,

$$|f_n(\tilde{x})-f(\tilde{x})|=\frac{1/2}{1+1/2}=\frac{1}{3}.$$

Такім чынам,

$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{4}>0 \quad \forall N \quad \exists n$ (у якасці n можна ўзяць любы нумар, які больш, чым N) $\exists\tilde{x}=\sqrt[n]{1/2}\in[\frac{1}{2},1]\Longrightarrow|f_n(\tilde{x})-f(\tilde{x})|=\frac{1}{3}>\varepsilon_0$,

значыць, $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ на $[1/2, 1]$.

2 спосаб (паводле крытэрыю раўнамернай збежнасці).

Знаходзім $\sup\limits_{x\in[1/2,1]}|f_n(x)-f(x)|=\sup\limits_{x\in[1/2,1]}\dfrac{x^n}{1+x^n}$.

Функцыя $x^n/(1+x^n)$ нарастае пры $x>0$, бо мае дадатную вытворную, значыць $\sup\limits_{x\in[1/2,1]} \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1^n}{1+1^n} = \frac{1}{2}$. А тады ўмова крытэрыю раўнамернай збежнасці $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup|f_n(x)-f(x)|\right)=0$, зразумела, не задавальняецца. Значыць, $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ на $[1/2, 1]$.

3 спосаб (паводле крытэрыю Кашы раўнамернай збежнасці).

Фіксуем адвольны нумар n. Возьмем $p=n$ і $\tilde{x}=\sqrt[n]{1/2}$. Тады $|f_{n+p}(\tilde{x})-f_n(\tilde{x})| = |f_{2n}(\tilde{x})-f_n(\tilde{x})| =$

$$=\left|\frac{\tilde{x}^{2n}}{1+\tilde{x}^{2n}}-\frac{\tilde{x}^{n}}{1+\tilde{x}^{n}}\right| = \left|\frac{1/4}{1+1/4}-\frac{1/2}{1+1/2}\right| = \frac{2}{15}$$

Такім чынам,

$\exists\,\varepsilon_0=\frac{1}{15}>0$ $\forall N$ $\exists\, n>N$ (у якасці n можна ўзяць любы нумар, які больш, чым N) $\exists\, p=n$ $\exists\,\tilde{x}=\sqrt[n]{1/2}\in\left(\frac{1}{2},1\right] \Rightarrow |f_{n+p}(\tilde{x})-f_n(\tilde{x})| = \frac{2}{15}>\varepsilon_0$, значыць, $f_n(x)\not\rightrightarrows f(x)$ на $[1/2, 1]$.

4 спосаб. Выкарыстаем тэарэму аб непарыўнасці лімітавай функцыі функцыйнай паслядоўнасці.

Функцыі $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$ $(n=1,2\dots)$ з'яўляюцца непарыўнымі на адрэзку $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, а лімітавая функцыя $f(x)=\begin{cases}0, & \text{калі } x\in[1/2, 1),\\ 1, & \text{калі } x=1\end{cases}$ мае разрыў у пункце $x=1$. Значыць, паводле тэарэмы 1, $f_n(x)\not\rightrightarrows f(x)$ на $[1/2, 1]$. ▲

2.6. Каментарый да тэарэм аб уласцівасцях раўнамерна збежных паслядоўнасцей

Разгледзім дзве паслядоўнасці

$$f_n(x)=\frac{2nx}{1+n^2x^2} \quad \text{і} \quad g_n(x)=2n^2x\,e^{-n^2x^2} \quad (0\le x\le 1).$$

Няцяжка бачыць, што

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2nx}{1+n^2x}=0 \quad \forall x\in[0,1],$$

$$g(x)=\lim_{n\to\infty} g_n(x)=\lim_{n\to\infty} 2n^2x\cdot e^{-n^2x^2}=0 \quad \forall x\in[0,1].$$

Паколькі

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,1]}\frac{2nx}{1+n^2x^2}=1,$$

то неабходная і дастатковая ўмова раўнамернай збежнасці

паслядоўнасці $(f_n(x))$ на $[0,1]$ (а іменна, $\lim_{n\to\infty}(\sup|f_n(x)-f(x)|=0)$ не задавальняецца.

Значыць, $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ на $[0,1]$.

Аналагічна даказваецца, што і

$$g_n(x) \not\rightrightarrows g(x) \text{ на } [0,1].$$

Такім чынам, мы маем паслядоўнасці $(f_n(x))$ і $(g_n(x))$ непарыўных функцый, якія збягаюцца нераўнамерна на $[0,1]$, але іх лімітавыя функцыі $f(x)=g(x)=0$ непарыўныя на гэтым адрэзку. Адсюль вынікае, што патрабаванне раўнамернай збежнасці паслядоўнасці (тэарэма 1, п. 2.5) не з'яўляецца неабходнай умовай для непарыўнасці лімітавай функцыі.

Узнікае меркаванне, што існуе нейкая "аслабленая раўнамерная збежнасць" функцыйнай паслядоўнасці, якая з'яўляецца адначасова неабходнай і дастатковай умовай непарыўнасці лімітавай функцыі. Сапраўды, такі асобы тып збежнасці паслядоўнасцей, які пазней атрымаў назву <u>квазіраўнамернай збежнасці</u>, разгледзіў у 1883 г. Арцэла.

Знойдзем зараз

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{2nx}{1+n^2x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1\frac{d(1+n^2x^2)}{1+n^2x^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(1+n^2x^2)\Big|_0^1 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(1+n^2) = 0,$$

адпаведна

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 2n^2x\cdot e^{-n^2x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(-e^{-n^2x^2}\right)\Big|_0^1 = \lim_{n\to\infty}(1-e^{-n^2}) = 1.$$

Паколькі

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = 0,$$

то атрымліваем, што

$$1 = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)\,dx \neq \int_0^1\left(\lim_{n\to\infty} g_n(x)\right)dx = 0,$$

у той жа час

$$0 = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx = 0.$$

Такім чынам, умова раўнамернай збежнасці ў тэарэме аб інтэграванні функцыйнай паслядоўнасці (тэарэма 2, п. 2.5)

з'яўляецца істотнай, але не з'яўляецца неабходнай умовай.

Заўважым, што патрабаванне раўнамернай збежнасці паслядоўнасці ў тэарэме 2 можа быць заменена больш агульным патрабаваннем абмежаванасці гэтай паслядоўнасці, але з дадатковым патрабаваннем інтэгравальнасці лімітавай функцыі.

Мае месца наступнае сцвярджэнне, якое належыць Арцэла: калі паслядоўнасць інтэгравальных на адрэзку $[a,b]$ функцый $f_n(x)$ ёсць абмежаваная ў сукупнасці, г. зн. $|f_n(x)| \leq Const$ $(x\in[a,b],$ $n=1,2,\dots)$ і $\forall x\in[a,b]$ існуе $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$, прычым $f(x)$ таксама інтэгравальная на $[a,b]$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Разгледзім зараз паслядоўнасць $(\varphi_n(x))$, дзе

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{n}\ln\left(1+n^2x^2\right)\qquad (0\leq x\leq 1).$$

Відавочна, што

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(1+n^2x^2)=0\qquad \forall x\in[0,1]$$

Паслядоўнасць вытворных $\varphi_n'(x)=\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ супадае з разгледжанай вышэй паслядоўнасцю $(f_n(x))$, значыць, яна збягаецца да нуля на адрэзку $[0,1]$ нераўнамерна, але $\forall x\in[0,1]$ $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n'(x)=0$. Такім чынам,

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n'(x)=\left[\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)\right]'=0.$$

Гэты прыклад сведчыць аб тым, што і ў тэарэме аб дыферэнцаванні функцыйных паслядоўнасцей (тэарэма 3, п. 2.5) патрабаванне аб раўнамернай збежнасці паслядоўнасці вытворных не з'яўляецца неабходным.

2.7. Агульныя рэкамендацыі па практычным даследаванні функцыйных паслядоўнасцей на раўнамерную збежнасць

Звычайна пры даследаванні функцыйнай паслядоўнасці $(f_n(x))$ на раўнамерную збежнасць на мностве X дзейнічаюць наступным чынам:

1. Знаходзяць лімітавую функцыю $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$. Калі функцыі $f_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$ непарыўныя на X, а $f(x)$ мае разрыў, то

адразу заключаем, што $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ на X. Калі ж $f(x)$ таксама непарыўная функцыя на X, то можна скарыстаць азначэнні раўнамернай або нераўнамернай збежнасці.

2. У тым выпадку, калі прымяненне азначэнняў не дазваляе вызначыць характар збежнасці, скарыстоўваюць прымету Вейерштраса, або крытэрый раўнамернай збежнасці. Для пабудовы лікавай паслядоўнасці (a_n), якая задавальняе ўмову $|f_n(x)-f(x)|\leq a_n$ $\forall x\in X$, і таксама для вызначэння $\sup|f_n(x)-f(x)|$, прымяняюць дыферэнцыяльнае злічэнне (тэорыю экстрэмумаў).

3. Іншы раз для доказу нераўнамернай збежнасці працей скарыстаць азначэнне, паколькі пры наяўнасці вопыту можна знайсці пункт $\tilde{x}$, які фігуруе ў азначэнні нераўнамернай збежнасці. Зразумела, што гэтая задача звычайна будзе больш лёгкай, чым знаходжанне $\sup|f_n(x)-f(x)|$

4. Усё вышэйсказанае мае перадумовай веданне лімітавай функцыі $f(x)$. Калі $f(x)$ ёсць невядомая функцыя, тады спрабуюць выкарыстаць крытэрый Кашы раўнамернай збежнасці, бо ён не прадугледжвае абавязковага ведання $f(x)$.

Практыкаванні.

1. Няхай паслядоўнасці $(f_n(x))$ і $(g_n(x))$ раўнамерна збягаюцца на мностве X. Дакажыце, што сума гэтых паслядоўнасцей таксама раўнамерна збягаецца на X.

2. Дакажыце, што калі функцыі $f_n(x)$ і $g_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ абмежаваныя на X і паслядоўнасці $(f_n(x))$ і $(g_n(x))$ раўнамерна збягаюцца на гэтым мностве, то здабытак $(f_n(x)\cdot g_n(x))$ таксама раўнамерна збягаецца на X.

3. Пабудуйце паслядоўнасці $(f_n(x))$ і $(g_n(x))$, якія раўнамерна збягаюцца на X, але здабытак $(f_n(x)\cdot g_n(x))$ збягаецца на X нераўнамерна.

4. Дакажыце рознымі спосабамі раўнамерную збежнасць паслядоўнасцей $(f_n(x))$ на мностве X:

а) $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$, $X=[0,1]$; б) $f_n(x)=x^n-x^{2n}$, $X=[0,1/2]$.

5. Дакажыце рознымі спосабамі нераўнамерную збежнасць паслядоўнасцей $(f_n(x))$ на мностве X:

а) $f_n(x)=nx(1-x)^n$, $X=[0,1]$; б) $f_n(x)=x^n-x^{2n}$, $X=[0,1]$.

6. Даследуйце паслядоўнасці $(f_n(x))$ на раўнамерную збежнасць на дадзеных прамежках:

а) $f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sin nx$ $(-\infty<x<\infty)$, г) $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$ $(0<x<+\infty)$,

б) $f_n(x)=\sin\frac{x}{\sqrt{n}}$ $(-\infty<x<\infty)$, д) $f_n(x)=\frac{1}{1+nx}$ $(0<x<1)$,

в) $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$ $(-10<x<10)$.

7. Дакажыце, што паслядоўнасць разрыўных функцый $f_n(x)=\frac{1}{n}\operatorname{sgn} x$ раўнамерна збягаецца да непарыўнай функцыі $f(x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

8. Праверце, ці выконваецца роўнасць

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx$$

для наступных паслядоўнасцей:

а) $f_n(x)=n^2x(1-x^2)^n$, б) $f_n(x)=nx(1-x^2)^n$.

9. Пакажыце, што паслядоўнасць $f_n(x)=\frac{1}{n}\sin n^2x$ раўнамерна збягаецца на $(-\infty,+\infty)$. Ці выконваецца ў дадзеным выпадку роўнасць

$$\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]'=\lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

10. Няхай $(f_n(x))$ раўнамерна збягаецца на X, а функцыя $\varphi(x)$ вызначана на мностве X. Дакажыце, што:

а) паслядоўнасць $g_n(x)=\varphi(x)\cdot f_n(x)$ можа збягацца на X нераўнамерна,

б) калі $\varphi(x)$ абмежаваная функцыя на мностве X, то $g_n(x)$ раўнамерна збягаецца на X.

3. РАЎНАМЕРНАЯ ЗБЕЖНАСЦЬ ФУНКЦЫЙНЫХ ШЭРАГАЎ

3.1. Азначэнне раўнамернай збежнасці шэрагаў

Разгледзім шэраг

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x),$$

які збягаецца на множстве X.

Няхай $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ — n-я частковая сума шэрагу, $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ — сума шэрагу, $r_n(x) = s(x) - s_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ — n-ая астача шэрагу.

Азначэнне. Шэраг $\sum u_k(x)$ называецца раўнамерна збежным на множстве X, калі паслядоўнасць яго частковых сум $(s_n(x))$ раўнамерна збягаецца на гэтым множстве, г. зн., калі $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ на X, або, у эквівалентнай форме,

$$r_n(x) \rightrightarrows 0 \quad \text{на } X.$$

Калі скарыстаць азначэнне раўнамернай збежнаці паслядоўнасці $(s_n(x))$, то атрымаем наступную фармулёўку раўнамернай збежнасці шэрагу:

Шэраг $\sum u_k(x)$ раўнамерна збягаецца на множстве X, калі $\forall \varepsilon>0 \quad \exists N=N(\varepsilon) \quad \forall n>N \quad \forall x\in X \Rightarrow |s_n(x)-s(x)| = |r_n(x)| < \varepsilon.$

3.2. Прыметы раўнамернай збежнасці шэрагаў

Раўнамерная збежнасць шэрагаў вызначаецца праз раўнамерную збежнасць паслядоўнасцей частковых сумаў. Гэтая акалічнасць дазваляе нам перанесці вядомыя прыметы раўнамернай збежнасці функцыйных паслядоўнасцей (п.2.4) на шэрагі.

Крытэрый Кашы раўнамернай збежнасці шэрагаў. Для таго, каб шэраг $\sum u_k(x)$ раўнамерна збягаўся на множстве X, неабходна і дастаткова, каб

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n>N(\varepsilon) \quad \forall p\in\mathbb{N} \quad \forall x\in X \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Крытэрый Кашы прымяняюць пераважна ў тэарэтычных даследаваннях. Для практычных мэт звычайна скарыстоўваюць дастатковыя прыметы раўнамернай збежнасці. Прасцейшай з такіх

прымет, якая часцей усяго прымяняецца пры даследаванні раўнамернай збежнасці канкрэтных функцыйных шэрагаў, з'яўляецца прымета Веерштраса.

Прымета Вейерштраса. Калі складнікі функцыйнага шэрагу $\sum u_k(x)$ задавальняюць на мностве X умовы

$$|u_k(x)| \leq a_k \quad (k=1,2,\dots)$$

і лікавы шэраг $\sum a_k$ збягаецца, то шэраг $\sum u_k(x)$ збягаецца раўнамерна на X.

Прыклад 1. Даследаваць на раўнамерную збежнасць функцыйны шэраг

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^k x}{k^2} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

ΔПаколькі $\forall x$

$$\left|\frac{\sin^k x}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2} \quad (k=1,2,\dots)$$

і шэраг $\sum 1/k^2$ збягаецца, то функцыйны шэраг раўнамерна збягаецца на $(-\infty, +\infty)$ ▲

Заўвага. Калі паводле прыметы Вейерштраса мы атрымаем, што шэраг $\sum u_k(x)$ раўнамерна збягаецца на X, то гэты шэраг, відавочна, павінен абсалютна збягацца, больш таго, шэраг $\sum |u_k(x)|$ будзе таксама раўнамерна збягацца на X. У гэтых сцвярджэннях лёгка ўпэўніцца, калі скарыстаць адпаведна прымету параўнання збежнасці дадатных шэрагаў і крытэрый Кашы раўнамернай збежнасці функцыйных шэрагаў. Такім чынам, прымета Вейерштраса можа даць станоўчы адказ аб раўнамернай збежнасці шэрагу толькі ў адносінах да абсалютна збежных шэрагаў. Між тым шэраг можа збягацца раўнамерна, але неабсалютна. Сапраўды, разгледзім наступны прыклад.

Прыклад 2. Даследаваць на абсалютную і раўнамерную збежнасць шэраг $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+\sqrt{k}}$, $x \in [0,1]$.

ΔПаколькі пры любым фіксаваным $x \in [0,1]$ выконваецца няроўнасць

$$\left|\frac{(-1)^k}{x+\sqrt{k}}\right| = \left|\frac{1}{x+\sqrt{k}}\right| \geq \frac{1}{1+\sqrt{k}} \quad (k=1,2,\dots)$$

і шэраг $\sum 1/(1+\sqrt{k})$ разбягаецца, то паводле прыметы параўнання

шэраг $\sum\left|\frac{(-1)^k}{x+\sqrt{k}}\right|$ таксама разбягаецца. Збежнасць жа шэрагу $\sum\frac{(-1)^k}{x+\sqrt{k}}$ на $[0,1]$ вынікае з прыметы Лейбніца. Такім чынам, дадзены шэраг збягаецца неабсалютна на $[0,1]$.

Дакажам раўнамерную збежнасць на $[0,1]$ дадзенага шэрагу. Відавочна, што скарыстаць прымету Вейерштраса ў нашым выпадку нельга, паколькі любы лікавы шэраг $\sum a_k$, складнікі якога задавальняюць умовы $\left|\frac{(-1)^k}{x+\sqrt{k}}\right| \le a_k$ $(k=1,2,\ldots)$, будзе разбягацца. Аднак з прыметы Лейбніца для n-й астачы шэрагу маем ацэнку:

$$|r_n(x)| \le \frac{1}{x+\sqrt{n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n+1}} \qquad \forall x\in[0,1],$$

адкуль і вынікае раўнамерная збежнасць шэрагу, паколькі, відавочна, што $r_n(x) \rightrightarrows 0$ на $[0,1]$. ▲

Адзначым яшчэ адну больш тонкую акалічнасць, калі прымету Вейерштраса нельга скарыстаць. Яна заключаецца ў тым, што шэраг $\sum u_k(x)$ можа адначасова збягацца абсалютна і раўнамерна на некаторым мностве, а шэраг $\sum|u_k(x)|$ на гэтым мностве можа збягацца нераўнамерна. А як адзначалася вышэй, з прыметы Вейерштраса вынікае не толькі раўнамерная збежнасць шэрагу $\sum u_k(x)$ а адначасова і раўнамерная збежнасць шэрагу $\sum|u_k(x)|$.

Прыкладам, які ілюструе сказанае, служыць шэраг

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^2}{(1+x^2)^k} \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

Калі ўважлівей прыгледзіцца да прыметы Вейерштраса, то можна заўважыць, што гэтая прымета ёсць па сутнасці ні што іншае, як прымета параўнання. Толькі ўмова прыметы $(|u_k(x)|\le a_k,$ $k=1,2,\ldots)$ выконваецца для ўсіх $x\in X$. Адзначаная акалічнасць не з'яўляецца выпадковай. Можна наогул даказаць, што ўсякая прымета збежнасці становіцца прыметай раўнамернай збежнасці шэрагу, калі яе ўмовы задавальняюцца незалежна ад x

Напрыклад, паводле прыметы Даламбера шэраг $\sum u_k(x)$ збягаецца на мностве X, калі $\forall k$ выконваюцца няроўнасці:

$$\left|\frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)}\right| \le q < 1 \qquad (x \in X).$$

Велічыня q, наогул кажучы, залежыць ад x, г. зн. $q=q(x)$. Дапусцім, што існуе лік q, які задавальняе няроўнасць пры ўсіх $x \in X$. Тады шэраг $\sum u_k(x)$ будзе раўнамерна збягацца на X, калі толькі $u_1(x)$ — абмежаваная на X функцыя. Паўторнае прымяненне няроўнасці паказвае, што калі $|u_1(x)| \le M$, то

$$|u_n(x)| \le q^{n-1}|u_1(x)| \le M q^{n-1} \qquad \forall x \in X$$

Сапраўды, з няроўнасці

$\left|u_2(x)/u_1(x)\right| \le q$ вынікае, што $|u_2(x)| \le q\,|u_1(x)| \le Mq$,

а з няроўнасці $\left|u_3(x)/u_2(x)\right| \le q$ вынікае, што

$$|u_3(x)| \le q|u_2(x)| \le q\cdot Mq = Mq^2 \qquad \text{і г. д.}$$

А тады раўнамерная збежнасць шэрагу $\sum u_k(x)$ вынікае з прыметы Вейерштраса, паколькі мажарантны шэраг $M\sum q^{k-1}$ $(0 \le q < 1)$, як вядома, збягаецца.

Аналагічным чынам, зыходзячы з прымет Кашы, Раабэ і г.д., можна атрымаць іншыя прыметы раўнамернай збежнасці функцыйных шэрагаў.

Укажам, напрыклад, дзве прыметы раўнамернай збежнасці шэрагаў, якія грунтуюцца на прыметах Дырыхле і Абеля. З дапамогай гэтых прымет даследуюцца на раўнамерную збежнасць як абсалютна збежныя шэрагі, так і ўмоўна збежныя.

Прымета Дырыхле-Хардзі. Калі частковыя сумы шэрагу $\sum b_k(x)$ абмежаваныя на мностве X, а функцыі $a_n(x)$ пры кожным $x \in X$ утвараюць манатонную паслядоўнасць, якая раўнамерна збягаецца да нуля на мностве X, то шэраг $\sum a_k(x)\cdot b_k(x)$ раўнамерна збягаецца на гэтым мностве.

Прымета Абеля-Хардзі. Калі паслядоўнасць функцый $a_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$ абмежаваная на мностве X і манатонная ў кожным пункце $x \in X$, а шэраг $\sum b_k(x)$ раўнамерна збягаецца на X,

то і шэраг $\sum a_k(x)\cdot b_k(x)$ таксама раўнамерна збягаецца на гэтым мностве.

Заўважым, што і ў прымеце Дырыхле і ў прымеце Абеля даследуецца раўнамерная збежнасць шэрагу $\sum a_k(x)\cdot b_k(x)$. Калі параўнаць гэтыя прыметы, то прыходзім да высновы, што ў прымеце Абеля больш жорсткія патрабаванні, чым у прымеце Дырыхле, накладваюцца на шэраг $\sum b_k(x)$, затое, у сваю чаргу, менш патрабуецца ад паслядоўнасці $(a_n(x))$.

Практыкаванні.

1. Дакажыце наступнае сцвярджэнне: калі для ўсіх $x \in X$ выконваюцца няроўнасці $|u_k(x)| \le V_k(x)$ $(k=1,2,\dots)$ і шэраг $\sum V_k(x)$ раўнамерна збягаецца на мностве X, то і шэраг $\sum u_k(x)$ таксама раўнамерна збягаецца на гэтым мностве.

2. Няхай, пачынаючы з некаторага нумара n, выконваецца няроўнасць $\sqrt[n]{|u_n(x)|} \le q < 1 \quad \forall x \in X$, дзе q не залежыць ад x. Дакажыце, што шэраг $\sum u_k(x)$ збягаецца раўнамерна на X.

3. Дакажыце, што калі шэраг $\sum u_k(x)$ раўнамерна збягаецца на мностве X, а функцыя $f(x)$ абмежаваная на гэтым мностве, то шэраг $\sum f(x)\cdot u_k(x)$ таксама раўнамерна збягаецца на X.

4. Дакажыце, што шэраг

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^2}{1+x^2}$$

збягаецца абсалютна і раўнамерна на мностве $X=(-\infty, +\infty)$, а шэраг $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}x^2}{1+x^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}$ збягаецца нераўнамерна на мностве X.

5. Дакажыце наступнае сцвярджэнне: калі шэраг $\sum |u_k(x)|$ раўнамерна збягаецца на $[a, b]$, то шэраг $\sum u_k(x)$ таксама раўнамерна збягаецца на гэтым адрэзку.

6. Дакажыце, карыстаючыся азначэннем, што функцыйны шэраг $\sum u_k(x)$ збягаецца нераўнамерна на дадзеным прамежку, калі:

а) $u_k(x) = \dfrac{x}{[(k-1)x+1](kx+1)}$, $x \in [0,1]$,

б) $u_k(x) = \dfrac{1}{(x+k)(x+k+1)}$, $x \in (0,+\infty)$.

7. Карыстаючыся прыметай Вейерштраса, дакажыце раўнамерную збежнасць на дадзеных прамежках наступных функцыйных шэрагаў:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{kx}{1+k^p x^2}$, $p>4$, $x \geq 0$,

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin(k+1)x}{(k+1)\sqrt{k}}$, $(-\infty < x < +\infty)$,

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \sin {1}/{4^k x}$, $x \in [\alpha, +\infty)$, $\alpha > 0$,

г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2 + \varphi^2(x)}$,

дзе $\varphi(x)$ - адвольная фуницыя.

8. Дакажыце, што шэраг
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^2+k}{k^2}$$
збягаецца раўнамерна на любым канечным адрэзку.

9. Даследуйце на раўнамерную збежнасць на дадзеных прамежках наступныя шэрагі:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{x+2^k}$, $-\infty < x < +\infty$,

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{x+k}$, $x>0$.

10. Няхай шэраг $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ збягаецца на адрэзку $[-R, R]$. Дакажыце, што гэты шэраг збягаецца раўнамерна на любым адрэзку $[-r, r]$, дзе $0 < r < R$.

11. Дакажыце, што шэрагі
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \cos kx \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sin kx \qquad (\alpha > 0)$$
раўнамерна збягаюцца на $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, дзе $0 < \varepsilon < \pi$. Атрымайце адпаведны рэзультат для шэрагаў $\sum (-1)^k \dfrac{\cos kx}{k^\alpha}$, $\sum (-1)^k \dfrac{\sin kx}{k^\alpha}$ шляхам замены x на $x+\pi$.

12. Няхай лікавы шэраг $\sum a_k$ збягаецца. Дакажыце, што шэрагі: а) $\sum a_k / k^x$, б) $\sum a_k \cdot e^{-kx}$

раўнамерна збягаюцца на прамежку $[c, +\infty)$.

13. Дакажыце, што шэраг $\sum u_k(x)$, дзе $u_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{калі } x \neq 1/k, \\ \frac{1}{k}, & \text{калі } x = 1/k, \end{cases}$ збягаецца раўнамерна на адрэзку $[0, 1]$. Ці будзе збягацца лікавы шэраг $\sum M_k$, дзе $M_k = \sup\limits_{x \in [0,1]} u_k(x)$?

3.3. Уласцівасці раўнамерна збежных шэрагаў

Вышэй мы ўжо падкрэслівалі цесную сувязь паміж збежнасцю шэрагаў і збежнасцю паслядоўнасцей Як вядома, збежнасць шэрагу вызначаецца праз збежнасць паслядоўнасці яго частковых сумаў, а збежнасць адвольнай паслядоўнасці можна вызначыць праз збежнасць адпаведнага шэрагу. Гэтая акалічнасць дазваляе перанесці ўласцівасці раўнамерна збежных паслядоўнасцей на раўнамерна збежныя шэрагі. Сфармулюем адпаведныя тэарэмы аб непарыўнасці сумы, пaскладовым інтэграванні і дыферэнцаванні функцыйных шэрагаў. Практычны абсяг скарыстання гэтых тэарэм значна шырэйшы, чым адпаведных тэарэм для паслядоўнасцей.

Тэарэма 1. Калі складнікі шэрагу $\sum u_k(x)$ непарыўныя на $[a, b]$ і шэраг раўнамерна збягаецца на гэтым адрэзку, то яго сума таксама будзе непарыўнай на $[a, b]$, інакш кажучы,

$$\lim_{x \to x_0} \sum u_k(x) = \sum \lim_{x \to x_0} u_k(x), \quad x \in [a, b].$$

Заўвага. Як і ў выпадку функцыйных паслядоўнасцей п. 2.5 , патрабаванне раўнамернай збежнасці не з'яўляецца неабходнай умовай непарыўнасці сумы шэрагу, аднак гэтае патрабаванне з'яўляецца істотным. Адпаведныя прыклады лёгка пабудаваць, грунтуючыся на прыкладах п. 2.6 . Цікава адзначыць, што тэарэма была памылкова сфармулявана ў падручніку Кашы без патрабавання раўнамернай збежнасці шэрагу. Само паняцце раўнамернай збежнасці шэрагу і тую ролю, якую яно адыгрывае ў функцыйных уласцівасцях сумы шэрагаў, Кашы зразумеў пазней.

Вярнуўшыся да гэтага сцвярджэння (ужо пасля пабудаванага Абелем контрпрыклада — шэрагу з непарыўнымі складнікамі, сума якога разрыўная), Кашы выпраўляе сваю "знакамітую памылку", дабаўляючы ў фармулёўку тэарэмы патрабаванне, каб "сума $u_n(x)+u_{n+1}(x)+\dots+u_m(x)$ была заўсёды бясконца малой пры бясконца вялікім n і $m>n$ ". Гэтая дадатковая ўмова фактычна з'яўляецца эквівалентнай патрабаванню раўнамернай збежнасці шэрагу (гл. крытэрый Кашы раўнамернай збежнасці шэрагаў).

Практыкаванні.

1. Дакажыце, што сума шэрагу $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^k}$ з непарыўнымі складнікамі мае разрыў у пункце $x=0$, г. зн. патрабаванне раўнамернай збежнасці шэрагу ў тэарэме 1 з'яўляецца істотным.

2. Дакажыце, што сума шэрагу

$$\sum_{k=1}^{\infty}2x\left[k^2e^{-k^2x^2}-(k-1)^2e^{-(k-1)^2x^2}\right]$$

будзе непарыўнаю на адрэзку $[0,1]$, хоць гэты шэраг збягаецца нераўнамерна на адрэзку $[0,1]$, г. зн. патрабаванне раўнамернай збежнасці ў тэарэме 1 не з'яўляецца неабходным.

Існуюць выпадкі, калі раўнамерная збежнасць шэрагу з'яўляецца не толькі дастатковай умовай непарыўнасці сумы шэрагу, а аказваецца і неабходнай умовай. Такая сітуацыя мае месца, напрыклад, у выпадку, калі ўсе складнікі шэрагу дадатныя.

Тэарэма 2 (Дзіні). Няхай складнікі збежнага на $[a,b]$ шэрагу $\sum u_k(x)$ непарыўныя і нязменназнакавыя на адрэзку $[a,b]$. Калі сума гэтага шэрагу таксама непарыўная на $[a,b]$, то шэраг збягаецца на $[a,b]$ раўнамерна.

Заўвага. Неабходна адзначыць, што ў тэарэме Дзіні мы патрабавалі непарыўнасць складнікаў і сумы шэрагу на замкнутым мностве, а іменна, на адрэзку $[a,b]$. Гэтае патрабаванне з'яўляецца істотным. Сапраўды, разгледзім на інтэрвале $(0,1)$ шэраг $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x(1-x)^{k-1}=x+x(1-x)+x(1-x)^2+\dots$.

Відавочна, што складнікі шэрагу дадатныя і непарыўныя на інтэрвале $(0,1)$. Для сумы шэрагу, які ўяўляе сабой геаметрычную прагрэсію з назоўнікам $1-x$, маем роўнасць

$$S(x)=\frac{x}{1-(1-x)}=1.$$

Такім чынам, сума шэрагу $S(x)=1$ таксама непарыўная функцыя. Аднак шэраг збягаецца нераўнамерна на інтэрвале $(0,1)$. Сапраўды, знойдзем n-ю астачу шэрагу:

$$r_n(x)=x(1-x)^n+x(1-x)^{n+1}+\cdots=\frac{x(1-x)^n}{1-(1-x)}=(1-x)^n.$$

Лёгка бачыць, што $r_n(x)\not\to 0$ на $(0,1)$, паколькі для $\tilde{x}=\frac{1}{n}\in(0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} r_n(\tilde{x})=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=1/e,$$

значыць, нельга за кошт выбару n дасягнуць няроўнасці $|r_n(x)|<\varepsilon$, дзе $\varepsilon<1/e$, для ўсіх $x\in(0,1)$ адначасова.

Тэарэма 3. Калі складнікі шэрагу $\sum u_k(x)$ інтэгравальныя на $[a,b]$ і шэраг раўнамерна збягаецца на гэтым адрэзку, то яго сума $S(x)$ таксама будзе інтэгравальнай і шэраг можна інтэграваць пасkладова, г. зн.

$$\int_a^b S(x)\,dx=\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\right]dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,dx.$$

Заўвага. Пры парушэнні раўнамернай збежнасці запісаная роўнасць можа не мець месца. Больш таго, сума $S(x)$ шэрагу, які складаецца з інтэгравальных складнікаў, можа быць неінтэгравальнай. Разам з тым, раўнамерная збежнасць не з'яўляецца неабходнай умовай пасkладовага інтэгравання функцыйнага шэрагу.

Тэарэма 4. Няхай шэраг $\sum u_k(x)$ збягаецца на $[a,b]$ і мае суму $S(x)$. Калі складнікі шэрагу $u_k(x)$ $(k=1,2,\ldots)$ дыферэнцавальныя на гэтым адрэзку і шэраг $\sum u_k'(x)$ раўнамерна збягаецца на $[a,b]$, то $S(x)$ таксама мае вытворную на адрэзку $[a,b]$, прычым

$$S'(x)=\left[\sum u_k(x)\right]'=\sum u_k'(x),\qquad x\in[a,b],$$

г.зн. функцыйны шэраг можна пасkладова дыферэнцаваць.

Заўвага. Не ўсякі раўнамерна збежны шэраг з дыферэнцавальнымі складнікамі дапускае пасткладовае дыферэнцаванне. Напрыклад, шэраг $\sum \frac{1}{k^2}\cos k^4x$ раўнамерна збягаецца на прамежку $[0,1]$, што вынікае з няроўнасці $\left|\frac{1}{k^2}\cos k^4x\right| \le \frac{1}{k^2}$ і прыметы Веерштраса. Аднак шэраг, складзены з вытворных $-\sum k^2 \sin k^4x$, збягаецца толькі ў пункце $x = 0$.

Менавіта таму ў тэарэме 3 у адрозненне ад папярэдніх тэарэм патрабуецца, каб не зыходны шэраг $\sum u_k(x)$, а шэраг, складзены з вытворных $\sum u'_k(x)$, раўнамерна збягаўся.

Справа ў тым, што вытворная характарызуе хуткасць змены функцыі, а не велічыню значэнняў функцыі. Нават калі модуль функцыі прымае вельмі малыя значэнні, вытворная можа змяняцца даволі значна, як гэта мела месца ў разгледжаным вышэй выпадку малых ваганняў вялікай частаты, таму раўнамерная збежнасць шэрагу, якая грунтуецца на даволі хуткім імкненні да нуля яго складнікаў, не заўсёды мае вынікам нават збежнасць шэрагу вытворных. А вось адваротнае сцвярджэнне мае месца: калі шэраг $\sum u'_k(x)$ раўнамерна збягаецца на $[a,b]$, то і шэраг $\sum u_k(x)$ будзе збягацца, прычым таксама раўнамерна, на гэтым адрэзку пры дадатковай умове, што ён збягаецца хоць у адным пункце $x_0 \in [a,b]$. Сэнс дадатковай умовы (аб збежнасці шэрагу $\sum u_k(x)$ у адным пункце) даволі зразумелы. Бо калі нам вядомыя $u'_k(x)$ $(k=1,2,\dots)$, то $u_k(x)$ вызначаюцца неадназначна, з дакладнасцю да адвольнай канстанты. Наяўнасць гэтай канстанты і можа выклікаць разбежнасць шэрагу $\sum u_k(x)$. Напрыклад, шэраг $\sum u'_k(x) = \sum kx^{k-1}$ раўнамерна збягаецца на $[0, 1/2]$. Аднак шэраг $\sum u_k(x)$, дзе $u_k(x) = x^k + C$ таксама раўнамерна збягаецца пры $C = 0$ і разбягаецца пры любым $C \neq 0$.

Той факт, што вытворная можа значна мяняцца нават пры малых ваганнях функцыі, быў скарыстаны Веерштрасам пры пабудове непарыўнай функцыі, якая не мае вытворнай ні ў адным пункце

(знакаміты прыклад Веерштраса). Гэтую функцыю Веерштрас прапанаваў у выглядзе шэрагу

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x), \quad \text{дзе} \quad 0<a<1.$$

Відавочна, што пры любым b гэты шэраг раўнамерна збягаецца на прамежку $(-\infty,+\infty)$, бо збягаецца мажарантны лікавы шэраг $\sum a^k$. Адсюль вынікае непарыўнасць функцыі $f(x)$ паводле тэарэмы 1. Шляхам даволі тонкіх і руплівых развагаў Веерштрас даказаў, што калі параметр b задавальняе ўмову $a\cdot b > 1 + 3\pi/2$, то функцыя $f(x)$ не будзе мець вытворнай ні ў адным пункце.

3.4. Агульныя рэкамендацыі па практычным даследаванні шэрагаў на раўнамерную збежнасць

Звычайна пры даследаванні функцыйных шэрагаў на раўнамерную збежнасць дзейнічаюць наступным чынам:

1. Прымяняюць найбольш простую і зручную прымету раўнамернай збежнасці шэрагаў — прымету Веерштраса. Для пабудовы мажарантнага лікавага шэрагу прыцягваюць сродкі дыферэнцыяльнага злічэння (тэорыю экстрэмумаў).

2. Калі шэраг збягаецца неабсалютна (гэта азначае, што прымету Веерштраса прымяніць нельга), то можна скарыстаць прыметы Дырыхле-Хардзі або Абеля-Хардзі.

3. Няхай вядома сума шэрагу. Калі гэтая сума з'яўляецца разрыўнай функцыяй, а складнікі шэрагу непарыўныя, то шэраг збягаецца нераўнамерна.

Калі ж сума шэрагу непарыўная на $[a,b]$ і яго складнікі таксама непарыўныя і нязменназнакавыя на адрэзку $[a,b]$, то паводле тэарэмы Дзіні шэраг збягаецца раўнамерна на гэтым адрэзку.

4. У выпадку знакачаргавальнага шэрагу $\sum(-1)^k u_k(x)$, складнікі якога задавальняюць умовы тэарэмы Лейбніца $(u_n(x)\downarrow 0)$, карысна скарыстаць ацэнку n -й астачы шэрагу $|r_n(x)|\le u_{n+1}(x)$.

У гэтым выпадку веданне сумы шэрагу не абявязкова.

5. Калі для частковых сум шэрагу атрымліваецца кампактны зручны выраз, то карыстаюцца азначэннем раўнамернай збежнасці шэрагаў і метадамі, якія тычацца даследавання на раўнамерную збежнасць функцыйных паслядоўнасцей.

Практыкаванні.

1. Карыстаючыся тэарэмай аб непарыўнасці сумы шэрагу, дакажыце, што шэраг

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^2(1-x^2)^{k-1}$$

збягаецца нераўнамерна на $(-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$.

2. Карыстаючыся тэарэмай Дзіні, дакажыце раўнамерную збежнасць шэрагу $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ на адрэзку $[0, q]$, дзе $0 < q < 1$.

3. Няхай

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{(k+1)^4} \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

Дакажыце, што:

а) функцыя $f(x)$ непарыўная на прамежку $-\infty < x < +\infty$,

б) шэраг можна пасkладова інтэграваць на гэтым прамежку,

в) шэраг можна паскладова дыферэнцаваць на гэтым прамежку.

4. Няхай

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+(x+k\omega)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+(x-k\omega)^2}.$$

Дакажыце, што:

1) $f(x)$ ёсць непарыўная функцыя пры любых x,

2) $f(x)$ ёсць перыядычная функцыя з перыядам ω

3.5. Заўвага аб абсалютна збежных і раўнамерна збежных шэрагах

Паміж абсалютнай збежнасцю і раўнамернай збежнасцю шэрагаў не існуе прамой сувязі. Шэраг можа раўнамерна збягацца на мностве X, але не збягацца абсалютна на гэтым мностве (напрыклад, $\sum \frac{(-1)^k}{(x+k)}$, $X = [0, +\infty)$). З другога боку, шэраг можа збягацца абсалютна на мностве X і не збягацца раўнамерна

на гэтым мностве (напрыклад, $\sum x^2/(1+x^2)^k$, $X=[0,1]$).

Аднак характар збежнасці (абсалютная збежнасць або раўнамерная збежнасць) істотна адбіваецца на ўласцівасцях шэрагу і яго сумы. Многія ўласцівасці сум з канечным лікам складнікаў пераносяцца на збежныя шэрагі, калі дадаткова патрабаваць абсалютнай або раўнамернай збежнасці.

У гэтым сэнсе, калі падсумаваць уласцівасці лікавых шэрагаў і сцвярджэнні п. 3.3 , прыходзім да наступных высноваў:

1) абсалютна збежныя шэрагі падобныя да канечных сум у тых адносінах, што іх можна перамнажаць як канечныя сумы; у іх можна адвольным чынам перастаўляць складнікі без парушэння збежнасці і змянення сумы;

2) раўнамерна збежныя шэрагі падобныя да канечных сум у тых адносінах, што іх сума будзе непарыўнай, калі складнікі з'яўляюцца непарыўнымі функцыямі; раўнамерна збежныя шэрагі можна пакладова інтэграваць і (пры вядомых дадатковых умовах) паскладова дыферэнцаваць.

Калі ж шэраг збягаецца адначасова раўнамерна і абсалютна, то ён валодае ўсімі пералічанымі вышэй ўласцівасцямі, г. зн. з такімі шэрагамі можна абыходзіцца як з канечнымі сумамі. Гэтая акалічнасць і тлумачыць той факт, што задоўга да з'яўлення паняцця раўнамернай збежнасці шляхам вольнага абыходжання з шэрагамі (без дастатковага абгрунтавання дзеянняў) тым не менш былі атрыманы многія важныя рэзультаты.

Розныя практыкаванні

1. Вызначце абсяг збежнасці шэрагу
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\ln^k x}{k}.$$
2. Шляхам паскладовага дыферэнцавання шэрагу $\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-kx}$ $(x \geq q > 0)$ знайдзіце суму шэрагу $\sum_{k=1}^{\infty} k^2/3^k$.
3. Знайдзіце суму шэрагу $\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)/2^k$.

4. Паказаць, што шэраг $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-kx}}{1+k^2}$ збягаецца пры $x \geq 0$ і разбягаецца пры $x < 0$. Дакажыце, што сума дадзенага шэрагу будзе непарыўнай пры $x \geq 0$ і дыферэнцавальнай пры $x > 0$.

5. Знайдзіце абсяг збежнасці шэрагу

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$$

6. Дакажыце, што шэраг $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$ разбягаецца пры ўсіх x.

7. Дакажыце, што:

а) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(1-x^k)\,(1-x^{k+1})} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (-1<x<1),$$

б) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(1-x^k)(1-x^{k+1})} = \frac{1}{x\,(1-x)^2} \qquad (|x|>1).$$

8. Вызначце абсяг збежнасці шэрагу

$$\sin x - \sin\sin x + \sin\sin\sin x - \sin\sin\sin\sin x + \dots$$

9. Няхай $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на (a,b), прычым $\forall n$ функцыі $f_n(x)$ непарыўныя на гэтым інтэрвале. Дакажыце, што для кожнай паслядоўнасці (x_n), якая збягаецца да $x \in (a,b)$, мае месца роўнасць

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x).$$

10. Дакажыце, што наступныя функцыйныя паслядоўнасці збягаюцца на адрэзку $[0, \pi]$, але нераўнамерна:

а) $f_n(x) = (\sin x)^n$, б) $f_n(x) = \sqrt[n]{\sin x}$.

11. Знайсці абсяг збежнасці наступных шэрагаў:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$,

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^x} \quad (0<a<1)$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^x} \quad (a>1)$,

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$.

12. Дакажыце, што:

а) шэраг $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^x$ раўнамерна збягаецца пры $x \geq 1+\varepsilon \ (\varepsilon>0)$,

б) шэраг $\sum_{k=1}^{\infty} -\ln k/k^x$, які атрыманы пачленным дыферэнцаваннем дадзенага шэрагу, таксама раўнамерна збягаецца

пры $x \geq 1+\varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$.

13. Дакажыце, што калі шэраг Дырыхле $\sum_{k=1}^{\infty} c_k / k^x$ збягаецца ў пункце x_0, то ён раўнамерна збягаецца на мностве $x > x_0$.

14. Пабудуйце шэраг $\sum a_n(x)$ з неадмоўнымі і непарыўнымі на адрэзку $[0,1]$ складнікамі, які збягаецца раўнамерна на гэтым адрэзку, але ў той жа час лікавы шэраг $\sum M_n$, дзе $M_n = \max\limits_{0 \le x \le 1} a_n(x)$ разбягаецца.

15. Дакажыце, што:

а) з раўнамернай збежнасці шэрагу $\sum |u_k(x)|$ на $[a,b]$ вынікае раўнамерная збежнасць $\sum u_k(x)$ на гэтым адрэзку;

б) з абсалютнай і раўнамернай збежнасці шэрагу $\sum u_k(x)$ на $[a,b]$ не вынікае, увогуле кажучы, раўнамернай збежнасці шэрагу $\sum |u_k(x)|$ на $[a,b]$.

4. СТУПЕНЕВЫЯ ШЭРАГІ

4.1. Азначэнне ступеневага шэрагу

Ступеневы шэраг мае выгляд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots, \qquad (1)$$

дзе z_0, a_k $(k=1,2,\ldots)$ – дадзеныя лікі, z – зменная. Лікі a_k звычайна называюць каэфіцыентамі шэрагу.

Пазначыўшы $z - z_0 = x$, атрымаем наступны выгляд ступеневага шэрагу:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (2)$$

Менавіта ў гэтай форме мы і будзем вывучаць ступеневыя шэрагі, якія адыгрываюць у аналізе выключна важную ролю. Відавочна, што ўсе уласцівасці ступеневых шэрагаў (2) можна перанесці і на шэрагі (1).

4.2. Абсяг збежнасці ступеневых шэрагаў; радыус збежнасці шэрагаў

Адвольныя функцыйныя шэрагі $\sum u_k(x)$ могуць збягацца на мноствах, якія маюць складаную структуру. Што тычыцца

ступеневых шэрагаў, то абсяг іх збежнасці мае надзвычай простую будову.

Відавочна, што шэраг (2) заўсёды збягаецца ў пункце $x=0$ (адпаведна, шэраг (1) заўсёды збягаецца ў пункце $z=z_0$). Існуюць ступеневыя шэрагі, якія збягаюцца толькі ў пункце $x=0$. Напрыклад, шэраг $\sum k^k x^k$ разбягаецца пры любым $x\neq 0$. Сапраўды, калі $x\neq 0$, то пры $n>1/|x|$ маем $|nx|>1$ і г.зн. дадзены шэраг не задавальняе неабходную ўмову збежнасці.

У той жа час існуюць шэрагі, якія збягаюцца пры любым x (напрыклад, $\sum x^k/k^k$), у чым лёгка ўпэўніцца, калі скарыстаць прымету Кашы.

Калі выключыць з разгляду абодва зазначаныя экстрэмальныя выпадкі, то можна сцвярджаць, што абсягам збежнасці ступеневага шэрагу з'яўляецца мноства надзвычай простай структуры.

Тэарэма 1. Калі абсяг збежнасці ступеневага шэрагу $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ не выраджаецца ў пункт $x=0$ і не супадае з $\mathbb{R}$, то існуе дадатны лік R такі, што шэраг абсалютна збягаецца ў кожным пункце інтэрвала $(-R, R)$ і разбягаецца ў кожным пункце, які ляжыць па-за адрэзкам $[-R, R]$.

Заўважым, што ў пунктах $x=-R$ і $x=R$ шэраг можа збягацца (абсалютна або ўмоўна), можа разбягацца.

Інтэрвал $(-R, R)$ называюць інтэрвалам збежнасці ступеневага шэрагу, а лік R — радыусам збежнасці шэрагу. Пры дапамозе замены $x=z-z_0$ атрымліваем, што ступеневы шэраг $\sum a_k (z-z_0)^k$ мае адпаведна інтэрвал збежнасці (z_0-R, z_0+R), дзе R — яго радыус збежнасці.

Прыклад 1. Знайсці радыус збежнасці і абсяг збежнасці наступных шэрагаў:

а) $1+x+x^2+\dots+x^n+\dots,$

б) $1-x+x^2/2-x^3/3+x^4/4-x^5/5+\dots,$

в) $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{x^n}{n}+\dots,$

г) $1+x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\dots+\frac{x^n}{n^2}+\dots$

△ Лёгка бачыць, што радыус збежнасці ўсіх чатырох шэрагаў $R=1$. Сапраўды, напрыклад, для апошняга шэрагу ў адпаведнасці з прыметай Даламбера маем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}/(n+1)^2}{x^n/n^2}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=|x|$$

Значыць, шэраг г) збягаецца абсалютна пры $|x|<1$ і разбягаецца, калі $|x|>1$. Адсюль вынікае, што $R=1$.

У пунктах $x=1$ і $x=-1$ патрабуецца дадатковае даследаванне. Пры $x=1$ і $x=-1$ атрымоўваем, адпаведна, шэрагі $1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2}$ і $1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k^2}$, якія, відавочна, збягаюцца.

Такім чынам, абсягам збежнасці шэрагу г) з'яўляецца адрэзак $[-1,+1]$.

Падобным чынам даказваецца, што абсягам збежнасці першых трох шэрагаў з'яўляюцца, адпаведна, інтэрвал $(-1,+1)$, прамежак $(-1,+1]$ і прамежак $[-1,1)$. ▲

Заўвага. Калі шэраг (2) збягаецца толькі ў пункце $x=0$, то лічаць $R=0$, калі ж шэраг збягаецца пры ўсіх x, то лічаць $R=+\infty$.

Такім чынам, усякі ступеневы шэраг мае радыус збежнасці R $(0\le R\le+\infty)$

Для таго, каб знайсці радыус збежнасці ступеневага шэрагу, скарыстоўваюць прымету Даламбера або прымету Кашы збежнасці шэрагаў. Мае месца наступнае сцвярджэнне.

Тэарэма 2. Калі існуе ліміт (канечны або бясконцы)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\ell \quad \left(\text{або} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\ell\right),$$

то радыус збежнасці шэрагу $\sum a_k x^k$ вызначаецца формулай:

$$R = \begin{cases} 1/\ell, & \text{калі } 0<\ell<+\infty, \\ 0, & \text{калі } \ell=+\infty, \\ +\infty, & \text{калі } \ell=0. \end{cases}$$

Заўважым, што больш агульны вынік атрымліваецца, калі карыстаюцца паняццем верхняга ліміту. Тады для радыуса збежнасці ступеневага шэрагу мае месца наступная формула Кашы-Адамара:

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

(пры гэтым маецца на ўвазе, што $R=0$, калі $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=+\infty$ і $R=+\infty$, калі $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=0$). Калі існуе $\lim\sqrt[n]{|a_n|}$, то той жа вынік для радыуса збежнасці шэрагу атрымліваем паводле прыметы Кашы

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}},$$

паколькі ў гэтым выпадку $\lim\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$. Аднак формула Кашы-Адамара мае больш шырокую сферу дастасавання, бо верхні ліміт можа існаваць, у той час, як звычайны ліміт $\lim\sqrt[n]{|a_n|}$ і не існуе.

Практыкаванні.

1. Знайдзіце радыусы збежнасці і абсяг збежнасці наступных шэрагаў:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{2^n}x^n$, в) $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 2^2}+\frac{x^3}{3\cdot 2^3}+\frac{x^4}{4\cdot 2^4}+\ldots$,

б) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k/\sqrt{k}$, г) $\frac{1}{3}+\frac{2x}{2\cdot 3^2}+\frac{3x^2}{2^2\cdot 3^3}+\frac{4x^3}{2^3\cdot 3^4}+\ldots$

2. Знайдзіце інтэрвал збежнасці шэрагаў $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k x^k$, каэфіцыенты якіх зададзены наступнымі судачыненнямі:

а) $a_k=1/\sqrt[k]{k}$, б) $a_k=(\sqrt[k]{k}-1)^k$, в) $a_k=\frac{(k!)^2}{(2k)!}$, г) $a_k=\sin^2 1/k$.

3. Знайдзіце радыусы збежнасці наступных шэрагаў:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}(x+2)^n$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(n+1)^n}{n^n}x\right]^n$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}(x+1/2)^n$,

4. Няхай ступеневы шэраг $\sum a_k x^k$ мае радыус збежнасці R. Які радыус збежнасці маюць шэрагі

а) $\sum a_k \rho^k x^k$, дзе ρ - канстанта,

б) $\sum a_k x^{k+m}$, дзе m - цэлы дадатны лік,

в) $\sum a_k x^{km}$, дзе m - цэлы дадатны лік?

4.3. Раўнамерная збежнасць ступеневых шэрагаў

Як вядома, функцыйныя шэрагі могуць збягацца на некаторым адрэзку $[a, b]$, але не збягацца раўнамерна на гэтым адрэзку. Паміж мноствам збежнасці функцыйнага шэрагу і мноствам яго раўнамернай збежнасці ў агульным выпадку цяжка ўстанавіць нейкую сувязь. Зусім проста гэта робіцца ў выпадку ступеневых шэрагаў. Мае месца наступная тэарэма.

Тэарэма 3. Няхай ступеневы шэраг $\sum a_k x^k$ мае радыус збежнасці $R > 0$. Тады гэты шэраг раўнамерна збягаецца на любым адрэзку $[-r, r]$, дзе $0 < r < R$.

Заўважым, што хоць лік r можна выбраць як хочаце блізкім да R, аднак сцвярджаць раўнамерную збежнасць шэрагу на ўсім інтэрвале збежнасці $(-R, R)$ нельга. У гэтым можна ўпэўніцца на прыкладзе шэрагу $\sum x^k$, які збягаецца на інтэрвале $(-1, +1)$, але збежнасць нераўнамерная на гэтым інтэрвале.

Зусім іншая карціна назіраецца ў выпадку, калі шэраг збягаецца на канцах інтэрвала збежнасці (у пунктах $-R$ і R). Мы абмяжуемся выпадкам, калі пункт $x = R$ з'яўляецца пунктам збежнасці шэрагу.

Тэарэма 4 (тэарэма Абеля). Калі ступеневы шэраг $\sum a_k x^k$ збягаецца (абсалютна або ўмоўна) на канцы $x = R$ інтэрвала збежнасці, то гэты шэраг будзе раўнамерна збягацца на адрэзку $[0, R]$.

Калі ж ступеневы шэраг разбягаецца пры $x = R$, то

яго збежнасць на прамежку $[0, R)$ не можа быць раўнамернай.

4.4. Непарыўнасць сумы ступеневага шэрагу

У якасці выніку раўнамернай збежнасці ступеневага шэрагу адзначым наступныя два сцвярджэнні.

Сцвярджэнне 1. Сума ступеневага шэрагу з'яўляецца непарыўнай функцыяй у кожным пункце, які належыць інтэрвалу збежнасці.

Сцвярджэнне 2 (тэарэма Абеля аб непарыўнасці). Калі шэраг $\sum a_k x^k$ збягаецца ў пункце $x = R$ $(0 < R < +\infty)$, то яго сума $s(x)$ будзе непарыўнай не толькі на інтэрвале $(-R, R)$, а і ў пункце $x = R$ (зразумела, гаворка ідзе аб непарыўнасці злева ў пункце $x = R$), г. зн. $\lim\limits_{x \to R-0} s(x) = s(R)$ або $\lim\limits_{x \to R-0} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k R^k$.

Тэарэмы аб раўнамернай збежнасці і непарыўнасці сумы ступеневага шэрагу зразумелым чынам можна сфармуляваць для шэрагаў выгляду $\sum a_k (x - x_0)^k$

4.5. Інтэграванне і дыферэнцаванне ступеневых шэрагаў

Як вядома (п. 3.3), магчымасць пасклaдовага інтэгравання і дыферэнцавання функцыйных шэрагаў грунтуецца на паняцці раўнамернай збежнасці. Што датычыцца ступеневых шэрагаў, то яны раўнамерна збягаюцца на любым адрэзку, які належыць інтэрвалу збежнасці. Вось чаму няма нічога дзіўнага ў тым, што пытанні пасклaдовага дыферэнцавання і інтэгравання ступеневых шэрагаў вырашаюцца надзвычай проста.

Тэарэма 5. Няхай шэраг $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ збягаецца на інтэрвале $(-R, R)$ і $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ $(-R < x < R)$.

Тады для любога $x \in (-R, R)$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x a_k t^k\,dt = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \dots, \qquad (3)$$

г. зн. ступеневы шэраг можна пасклaдова інтэграваць.

Заўвага. Калі ступеневы шэраг $\sum a_k x^k$ збягаецца на канцы

інтэрвала збежнасці, напрыклад, пры $x = R$, то паводле тэарэмы 4 яго можна інтэграваць на адрэзку $[0, R]$. Аналагічнае сцвярджэнне мае месца і для $x = -R$.

Адзначым яшчэ адну акалічнасць. Паколькі каэфіцыенты зыходнага шэрагу і праінтэграванага шэрагу (3) задавальняюць умовы $|a_n/(n+1)| \le |a_n|$ пры ўсіх n, то можна сцвярджаць, што шэраг, атрыманы паскладовым інтэграваннем, збягаецца хутчэй, чым першапачатковы ступеневы шэраг. Што тычыцца радыусаў збежнасці абодвух шэрагаў, то яны аднолькавыя, значыць, інтэрвалы збежнасці гэтых шэрагаў супадаюць. Абсяг збежнасці праінтэграванага шэрагу (3) можа пашырыцца ў параўнанні з першапачатковым шэрагам толькі за кошт магчымага дабаўлення пунктаў $x = -R$ і $x = R$. Напрыклад, шэраг $\sum x^k$ збягаецца на інтэрвале $(-1, 1)$, а шэраг $\sum x^{k+1}/(k+1)$, атрыманы шляхам паскладовага інтэгравання, збягаецца на прамежку $[-1, 1)$

Тэарэма 6. Няхай шэраг $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ збягаецца на інтэрвале $(-R, R)$ і $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (-R < x < R)$.
Тады функцыя $f(x)$ мае вытворныя любога парадку на інтэрвале $(-R, R)$, прычым

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1) a_k x^{k-m} \quad (m = 1, 2, \dots),$$

г. зн. ступеневы шэраг можна паскладова дыферэнцаваць на інтэрвале збежнасці любую колькасць разоў.

Адзначым, што радыусы збежнасці ўсіх шэрагаў, якія атрымліваюцца пры дыферэнцаванні, застаюцца роўнымі R, г. зн. інтэрвалы збежнасці не мяняюцца пры паскладовым дыферэнцаванні ступеневых шэрагаў. Абсяг збежнасці шэрагу, атрыманага ў выніку дыферэнцавання, можа звузіцца за кошт магчымай страты пунктаў збежнасці $|x| = R$ першапачатковага шэрагу. Напрыклад, шэраг $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ мае абсягам збежнасці адрэзак $[-1, +1]$, але пасля аднаразовага дыферэнцавання атрымоўваецца шэраг $\sum x^{k-1}/k$ з абсягам збежнасці

$[-1,1)$, пасля двухразовага дыферэнцавання — з абсягам збежнасці $(-1,1)$.

Заўвага. Калі шэраг $\sum k a_k x^{k-1}$, атрыманы ў выніку паскладовага дыферэнцавання, збягаецца, напрыклад, у пункце $x=R$, то тэарэма аб паскладовым дыферэнцаванні ступеневага шэрагу мае месца не толькі для $x\in(-R,R)$, а і для $x=R$. Тое ж самае можна сцвярджаць і адносна пункта $x=-R$, калі прадыферэнцаваны шэраг збягаецца, адпаведна, пры $x=-R$.

Вынік. Ступеневы шэраг больш агульнага выгляду

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \qquad (|x-x_0|<R)$$

дапускае на інтэрвале збежнасці $(x_0-R,\ x_0+R)$ паскладовае дыферэнцаванне любую колькасць разоў, пры гэтым

$$f^{(m)}(x)=\sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1)(x-x_0)^{k-m} \qquad (m=1,2,\dots).$$

Прыклад 2. Знайсці суму шэрагу

$$1+2x+3x^2+\dots+(n+1)x^n+\dots$$

ΔДадзены шэраг збягаецца на інтэрвале $(-1,1)$. Няхай $s(x)$ ёсць сума гэтага шэрагу. Паскладова інтэгруючы роўнасць

$$s(x)=1+2x+3x^2+\dots+(n+1)x^n+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k,$$

атрымліваем для любога $x\in(-1,1)$

$$\int_0^x s(t)\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x (k+1)t^k\,dt=\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1}=\frac{x}{1-x}$$

Дыферэнцуючы апошнюю роўнасць, маем

$$s(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2} \qquad (-1<x<1).$$ ▲

Прыклад 3. Знайсці суму шэрагу Лейбніца

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n+1}+\dots$$

Δ Разгледзім геаметрычную прагрэсію

$$1-x^2+x^4-x^6+\dots+(-1)^{n-1}x^{2n}+\dots=\frac{1}{1+x^2} \qquad (|x|<1)$$

У выніку паскладовага інтэгравання гэтага шэрагу атрымоўваем

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg} x.$$

Атрыманы функцыйны шэраг збягаецца на мностве $-1<x\le 1$.

Пры $x=1$ маем (мы карыстаемся тэарэмай Абеля аб непарыўнасці

сумы ступеневага шэрагу (п. 4.4) у пункце $x=1$, г. зн. $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum a_k x^k = \sum a_k$):

$$1-1/3+1/5-1/7+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n+1}+\dots=\operatorname{arctg} 1=\pi/4. \quad \blacktriangle$$

Прыклад 4. Знайсці суму шэрагу

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{x^n}{n}+\dots$$

ΔДадзены шэраг збягаецца пры $-1\le x<1$. Няхай $S(x)$ ёсць сума гэтага шэрагу. Дыферэнцуючы пакладова роўнасць

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k,$$

атрымліваем

$$S'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}=\frac{1}{1-x} \qquad (-1<x<1).$$

Адкуль шляхам інтэгравання маем:

$$S(x)=\int_0^x \frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x) \qquad (-1\le x<1).$$

Падкрэслім яшчэ раз тую акалічнасць, што роўнасць $S(x)=-\ln(1-x)$ мы даказалі на падставе сцвярджэння 2 п. 4.4 не толькі на інтэрвале $(-1,1)$, а і ў пункце $x=-1$, паколькі шэраг $\sum x^k/k$ збягаецца ў гэтым пункце; папярэдняя ж роўнасць $S'(x)=\frac{1}{1-x}$ мае месца толькі на інтэрвале $-1<x<1$. $\blacktriangle$

Практыкаванні.

1. Шляхам пакладовага дыферэнцавання і інтэгравання, знайдзіце сумы наступных шэрагаў:

а) $1-3x^2+5x^4-\dots+(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}+\dots,$

б) $x+x^3/3+x^5/5+\dots+x^{2n-1}/(2n-1)+\dots,$

в) $1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\dots+n(n+1)x^{n-1}+\dots$

2. Знайдзіце сумы шэрагаў

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\dots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\dots,$

б) $\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}+\dots,$

в) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\dots+\frac{(-1)^n}{3n+1}+\dots$

5. РАСКЛАДАННЕ ФУНКЦЫЙ У СТУПЕНЕВЫЯ ШЭРАГІ

5.1. Шэрагі Тэйлара

Няхай ступеневы шэраг $\sum a_k (x-x_0)^k$ збягаецца на інтэрвале (x_0-R, x_0+R) і мае суму $f(x)$, г. зн.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \qquad (|x-x_0|<R).$$

У такім выпадку гавораць, што функцыя $f(x)$ раскладаецца на інтэрвале (x_0-R, x_0+R) у ступеневы шэраг па ступенях $x-x_0$.

На падставе тэарэмы 6 п. 4.5 аб паскладовым дыферэнцаванні ступеневых шэрагаў атрымоўваем наступныя роўнасці:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$

$$f'(x) = 1\cdot a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \dots$$

$$f''(x) = 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x-x_0) + \dots + (n-1)na_n(x-x_0)^{n-2} + \dots$$

$$f'''(x) = 1\cdot 2\cdot 3a_3 + \dots + (n-2)(n-1)na_n(x-x_0)^{n-3} + \dots$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot a_n + \dots$$

. . . .

Узяўшы ў гэтых роўнасцях $x = x_0$, маем:

$$f(x_0) = a_0,\quad f'(x_0) = 1!\,a_1,\quad f''(x_0) = 2!\,a_2,\ \dots,\ f^{(n)}(x_0) = n!\,a_n, \dots$$

Адкуль

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k=0,1,2,\dots).$$

Вынік. Калі на інтэрвале $|x-x_0|<R$ $(R>0)$ функцыя $f(x)$ раскладаецца ў ступеневы шэраг

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k,$$

то

$$\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}} \quad (k=0,1,2,\dots), \qquad (1)$$

г. зн. мае месца формула

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \qquad (2)$$

Каэфіцыенты (1) называюць каэфіцыентамі Тэйлара, а шэраг (2) шэрагам Тэйлара па ступенях $x-x_0$, або шэрагам Тэйлара ў пункце x_0

Пры $x_0 = 0$ атрымаем

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

а шэраг Тэйлара набудзе выгляд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k. \tag{4}$$

Шэраг (4) звычайна называюць шэрагам Тэйлара па ступенях x або шэрагам Тэйлара ў пункце $x_0 = 0$, або шэрагам Маклорэна, а каэфіцыенты (3) — каэфіцыентамі Маклорэна.

Такім чынам, прыходзім да наступнай высновы:

Калі функцыя раскладаецца ў ступеневы шэраг, то гэты шэраг неабходна ёсць шэраг Тэйлара (Маклорэна).

Формулы (1)—(4) надта цікавыя. Яны паказваюць, з аднаго боку, што каэфіцыенты ступеневага раскладу функцыі $f(x)$ вызначаюцца значэннямі функцыі і яе вытворных у адзіным пункце; з другога боку, калі дадзены каэфіцыенты ступеневага шэрагу, то значэнні вытворных функцыі $f(x)$ у сярэдзіне інтэрвала збежнасці можна вызначыць непасрэдна са ступеневага шэрагу: $f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$.

Заўважым, што расклад (2) знайшоў у 1715 г. Тэйлар на падставе складаных і надта нястрогіх развагаў. Формула (4) была адкрыта Стырлінгам (1717) і апублікавана Маклорэнам (1742). Цікава, што доказ Маклорэна (мы яго вышэй і скарысталі) быў бы поўнасцю бездакорным, калі б ім была абгрунтавана законнасць пачленнага дыферэнцавання шэрагаў. Дзеля справядлівасці адзначым, што шэрагі, якія мы звязваем з імем Тэйлара, разглядаў І.Бернулі яшчэ ў 1694 годзе.

5.2. Раскладанне функцый у ступеневыя шэрагі

Няхай дадзена функцыя $f(x)$ і пастаўлена задача аб знаходжанні яе раскладу ў ступеневы шэраг. Па-першае, узнікае пытанне аб існаванні такога раскладу. На падставе тэарэмы аб пачленным дыферэнцаванні ступеневых шэрагаў заключаем, што сума $f(x)$ усякага ступеневага шэрагу ёсць зусім асаблівая функцыя, таму што яна мае вытворныя любога парадку на інтэрвале

збежнасці шэрагу, інакш кажучы, з'яўляецца бясконца дыферэнцавальнай. Такім чынам, не ўсякая функцыя раскладаецца ў ступеневы шэраг, бо яна павінна быць прынамсі бясконца дыферэнцавальнай.

Дапусцім $f(x)$ задавальняе гэтую ўмову. Тады знойдзем каэфіцыенты Тэйлара $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $(k=0,1,\dots)$ і пабудуем шэраг Тэйлара $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

На першы погляд здаецца, што зараз ужо не застаецца ніякіх сумненняў, што мы рашылі пастаўленную задачу, што пабудаваны шэраг Тэйлара павінен збягацца і павінен мець сумай раскладальную функцыю $f(x)$. Але ў сапраўднасці ўсё можа быць значна больш складаным.

Па-першае, пабудаваны для дадзенай бясконца дыферэнцавальнай функцыі $f(x)$ шэраг Тэйлара можа разбягацца ўсюды, зразумела акрамя пункта $x=x_0$. Гэта вынікае з таго, што для любой лікавай паслядоўнасці $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ існуе (доказ існавання вельмі складаны) функцыя $f(x)$ такая, што $f^{(n)}(x_0)=c_n$ $(n=0,1,2,\dots)$.

Па-другое, шэраг Тэйлара дадзенай функцыі $f(x)$ можа атрымацца збежным на нейкім інтэрвале (x_0-R, x_0+R), дзе $R>0$, аднак сума гэтага шэрагу можа адрозніваецца ад $f(x)$. Першым прыкладам, які рэалізуе гэтую сітуацыю, быў знакаміты прыклад Кашы:

$$F(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{калі } x \neq 0, \\ 0, & \text{калі } x = 0. \end{cases}$$

Функцыя $F(x)$ мае вытворныя любога парадку, прычым

$$0 = F(0) = F'(0) = F''(0) = F'''(0) = \dots$$

Значыць, ступеневы шэраг Маклорэна

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \dots + 0\cdot x^n + \dots$$

мае суму $S(x)=0$ $\forall x$ і $F(x) \neq S(x)$ ва ўсіх пунктах $x \neq 0$.

Такім чынам, бясконцая дыферэнцавальнасць з'яўляецца толькі

неабходнай умовай раскладальнасці функцыі ў ступеневы шэраг і не з'яўляецца дастатковай умовай.

Для функцый, якія дапускаюць расклад ў ступеневы шэраг на некаторым мностве, маецца спецыяльная назва - аналітычныя функцыі.

5.3. Умовы раскладальнасці функцыі ў ступеневы шэраг

Для таго каб знайсці дастатковыя ўмовы раскладальнасці функцыі ў ступеневы шэраг, прыцягваюць формулу Тэйлара

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n-1}(x),$$

дзе $R_{n-1}(x)$ - рэшткавы складнік.

Паколькі рознасць паміж $f(x)$ і n -й частковай сумай шэрагу Тэйлара $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ роўная якраз рэшткаваму складніку формулы Тэйлара $R_{n-1}(x)$, то, відавочна, мае месца наступнае

Сцвярджэнне. Для таго, каб бясконца дыферэнцавальная на інтэрвале (x_0-R, x_0+R) функцыя $f(x)$ раскладалася ў ступеневы шэраг Тэйлара на гэтым інтэрвале, неабходна і дастаткова, каб рэшткавы складнік формулы Тэйлара $R_n(x)$ задавальняў умову:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad (|x-x_0|<R).$$

Каб перасцерагчы ад магчымай блытаніны, падкрэслім, што $R_n(x)$ ёсць n -ы рэшткавы складнік формулы Тэйлара, а не сума n -й астачы шэрагу $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, таму што сума астачы шэрагу мае сэнс толькі тады, калі вядома, што шэраг збягаецца.

Калі запісаць $R_n(x)$ у форме Лагранжа: $R_n(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$, дзе пункт c ляжыць паміж x_0 і x, то ў якасці выніку папярэдняга сцвярджэння атрымліваем наступную дастатковую ўмову раскладальнасці функцыі ў ступеневы шэраг:

Тэарэма (дастатковая ўмова раскладальнасці функцыі ў шэраг).

Калі бясконца дыферэнцавальная на інтэрвале (x_0-R, x_0+R)

функцыя $f(x)$ задавальняе на гэтым інтэрвале ўмовы

$$|f^{(k)}(x)| \leq M \quad (k=0,1,2,\ldots),$$

дзе M не залежыць ад x, то $f(x)$ раскладаецца ў ступеневы шэраг, г. зн.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (|x-x_0|<R).$$

5.4. Гістарычная даведка

Цікава адзначыць, што не толькі папярэднікі, але і многія сучаснікі Кашы знаходзіліся ў палоне памылковага сцвярджэння, што ўсякая бясконца дыферэнцавальная функцыя $F(x)$ абавязкова павінна раскладацца ў ступеневы шэраг (нават пасля таго, як прыклад Кашы быў апублікаваны). Аб гэтым сведчыць, напрыклад, наступнае.

У сваім лекцыйным курсе, гаворачы аб шэрагах Тэйлара і Маклорэна, Кашы зрабіў такую заўвагу: "Не трэба думаць, што шэраг Маклорэна

$$F(0)+\frac{F'(0)}{1!}x+\frac{F''(0)}{2!}x^2+\ldots,$$

які мяркуецца збежным, заўсёды мае сумаю $F(x)$ і што $F(x)$ роўная нулю, калі ўсе складнікі шэрагу знішчаюцца. У процілеглым можна ўпэўніцца, разглядаючы функцыі $F(x)=e^{-1/x^2}$ і $F(x)=e^{-x^2}+e^{-1/x^2}$; першая не будзе роўная нулю пры ўсіх x, нягледзячы на тое, што кожны складнік яе раскладу знішчаецца; другая, а іменна $e^{-x^2}+e^{-1/x^2}$, дае шэраг, які мае сумаю e^{-x^2}, а не $e^{-x^2}+e^{-1/x^2}$".

Такім чынам, Кашы ўпершыню (1821) выяўляе выразнае адрозненне паміж збежнасцю шэрагу наогул і збежнасцю да дадзенай функцыі.

Калі акадэмік Бунякоўскі перакладаў на рускую мову лекцыйны курс Кашы, то ён запісаў наконт гэтай заўвагі наступнае: "Пры перакладзе я лічыў сваім абавязкам ні ў якім выпадку не адступаць ад арыгінала, таму захавана тут гэтая заўвага, хоць у справядлівасці яе матэматыкі і не згаджаюцца з Кашы. Пярэчанні наконт гэтага, зробленыя Пуасонам, можна знайсці ў Bulletin de

la Societe Phylomatique de Paris, 1822, с. 84-85."

Дададзім яшчэ, што ў прадмове да падручніка "Алгебраічны аналіз" Кашы піша ў адносінах да тэарэмы аб раскладзе функцыі ў ступеневы шэраг: "Скажу больш, доказ гэтай тэарэмы даступны нямногім, ды і самі вучоныя яшчэ не ўсе згодныя з тым, у якіх межах яна справядлівая". Нічога, апроч здзіўлення, гэтыя словы Кашы не выклікаюць нават у сучасных студэнтаў.

Як тут зноў не прыгадаць выказванне Гегеля: "Тое, чым у мінулыя эпохі займаліся толькі сталыя розумы вучоных дзеячоў, у больш познія часы зрабілася даступным разуменню хлапчукоў". Дададзім да гэтага і словы аднаго з заснавальнікаў квантавай механікі М. Планка, які ў "Навуковай аўтабіяграфіі" пісаў: "Звычайна новыя навуковыя ісціны перамагаюць не так, што іх праціўнікаў пераконваюць і яны прызнаюць сваю памылку, а большай часткай так, што праціўнікі гэтыя паступова выміраюць, а падрастаючае пакаленне засвойвае ісціну адразу".

6. РАСКЛАДАННЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦЫЙ У СТУПЕНЕВЫЯ ШЭРАГІ

6.1. Папярэднія заўвагі

Зараз мы разгледзім некаторыя элементарныя функцыі, якія раскладаюцца ў ступеневыя шэрагі, і знойдзем для гэтых функцый адпаведныя шэрагі.

Калі вядома, што функцыя $f(x)$ раскладаецца ў ступеневы шэраг, то яго прынамсі для элементарных функцый знайсці няцяжка, бо гэта ёсць шэраг Тэйлара (Маклорэна)

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k, \quad \text{дзе} \quad a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Уся цяжкасць заключаецца ў тым, каб устанавіць, што дадзеная функцыя раскладаецца ў ступеневы шэраг. Для доказу гэтага скарыстоўваюць розныя метады. Дастаткова, напрыклад, даказаць, што рэштkавы складнік формулы Тэйлара $R_n(x)\to 0$ пры $n\to\infty$. Гэтая ўмова зусім проста правяраецца для функцый e^x, $\sin x$, $\cos x$.

Для іншых элементарных функцый даследаванне рэшткавага складніка $R_n(x)$ спалучаецца са значнымі цяжкасцямі. Аднак, на шчасце, можна пайсці ўскосным шляхам, які надзвычай багаты ўсялякімі магчымасцямі. Сутнасць яго заключаецца ў тым, што спачатку будуюць для дадзенай функцыі $f(x)$ шэраг Тэйлара, затым знаходзяць яго прамежак збежнасці, а потым даказваюць, што пабудаваны шэраг мае сумай зыходную функцыю $f(x)$. Гэты метад мы прадэманструем на прыкладзе біномнага шэрагу, калі $f(x)=(1+x)^p$.

Ступеневыя шэрагі для лагарыфмічнай і адваротных трыганаметрычных функцый атрымліваюць шляхам паскладовага дыферэнцавання і інтэгравання адпаведных шэрагаў (напрыклад, геаметрычнай прагрэсіі).

Расклад гіпербалічных функцый $\operatorname{sh} x$ і $\operatorname{ch} x$ можна знайсці шляхам адымання і складання адпаведных шэрагаў для e^x і e^{-x}.

Заўважым, што існуюць магутныя агульныя прынцыпы, на якіх грунтуюцца ўмовы раскладальнасці функцый у ступеневыя шэрагі і якія робяць зусім непатрэбным складанае даследаванне паводзін рэшткавага складніка формулы Тэйлара. Гэтыя прынцыпы разглядаюцца ў тэорыі функцый камплекснай зменнай.

Пабудуем зараз расклад прасцейшых элементарных функцый у ступеневы шэраг Маклорэна, які мае выгляд:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

6.2. Расклад паказнікавай, некаторых трыганаметрычных і гіпербалічных функцый

Паказнікавая функцыя $f(x)=e^x$.

Пры ўсіх n вытворная $f^{(n)}(x)=e^x$. На любым адрэзку $[-r,r]$, дзе $r>0$, $|f^{(n)}(x)|=e^x\le e^r$. Значыць, на любым адрэзку $[-r,r]$ $f(x)$ задавальняе ўмовы тэарэмы п. 5.3 аб раскладальнасці функцыі ў ступеневы шэраг. Паколькі $f^{(n)}(0)=1\ \forall n$, то атрымліваем

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty). \qquad (1)$$

Замяніўшы x на $-x$, маем

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty). \qquad (2)$$

Трыганаметрычныя функцыі

На падставе аналагічных развагаў, як і ў выпадку паказнікавай функцыі, атрымліваем:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty), \qquad (3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty). \qquad (4)$$

Заўважым, што шэраг (4) можна атрымаць шляхам паскладовага дыферэнцавання шэрагу (3).

Гіпербалічныя функцыі

Расклады функцый $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ і $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ атрымліваюцца шляхам адымання і складання шэрагаў (1) і (2):

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

Заўважым, што расклад гіпербалічных функцый адрозніваецца ад раскладу аднайменных трыганаметрычных функцый толькі знакамі.

6.3. Расклад лагарыфмічнай функцыі

Геаметрычная прагрэсія

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

мае прамежак збежнасці $(-1, +1)$. Замяніўшы x на $-x$, атрымаем

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \qquad (-1 < x < 1).$$

Шляхам паскладовага інтэгравання ў межах ад 0 да x знаходзім:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \qquad (-1 < x \le 1), \qquad (5)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^{n+1}}{n+1} - \dots \qquad (-1 \le x < 1). \qquad (6)$$

Заўважым, што справядлівасць формул (5) і (6) пры $x = 1$

і, адпаведна, $x=-1$ устанаўліваецца дадаткова з дапамогай тэарэмы Абеля аб непарыўнасці п. 4.4.

Пры практычным вылічэнні лагарыфмаў карыстаюцца звычайна не шэрагам (5), а шэрагам

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots\right)\qquad(-1<x<1), \quad (7)$$

які з'яўляецца рознасцю шэрагаў (5) і (6).

Напрыклад, пры $x=1/3$ з формулы (7) вынікае, што

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\dots+\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^{2n+1}}+\dots\right),$$

у той жа час з судачынення (5) маем пры $x=1$

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+(-1)^n\frac{1}{n}+\dots.$$

Відавочна, што апошні шэраг збягаецца вельмі марудна.

Напрыклад, каб знайсці набліжанае значэнне $\ln 2$ з абсалютнай хібнасцю $\varepsilon=10^{-5}$, патрэбна ўзяць у апошнім шэрагу 100000 складнікаў; калі ж скарыстаць папярэдні шэраг, то для дасягнення той жа мэты дастаткова толькі пяць складнікаў. У сувязі з гэтай акалічнасцю можна зноў прыгадаць словы Ньютана, звернутыя да Лейбніца: "Патрэбна 1000 гадоў, каб знайсці з дапамогай апошняга шэрагу 20 знакаў $\ln 2$ ".

6.4. Біномныя шэрагі

Няхай $f(x)=(1+x)^m$, дзе m – любы лік, адрозны ад нуля і ад усіх натуральных лікаў (пры натуральным m атрымліваецца вядомы канечны расклад паводле формулы Ньютана).

Як лёгка бачыць, для вытворнай $f^{(n)}(x)$ пры любых n выконваецца роўнасць

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}.$$

Тады шэраг Маклорэна для функцыі $f(x)=(1+x)^m$ будзе мець выгляд:

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n+\dots \qquad (8)$$

Шэраг (8) збягаецца на інтэрвале $(-1,1)$, у чым можна ўпэўніцца, калі прымяніць прымету Даламбера. Няхай сума шэрагу (8) ёсць $S(x)$, г. зн.

$$S(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots \quad (-1 < x < 1). \qquad (9)$$

Шляхам пакладовага дыферэнцавання шэрагу (9) даказваецца, што $S(x)$ задавальняе судачыненне

$$m\,S(x) = (1+x)\cdot S'(x).$$

Такое ж судачыненне задавальняе (у чым лёгка ўпэўніцца) і функцыя $f(x) = (1+x)^m$:

$$m\,f(x) = (1+x)\cdot f'(x)$$

Такім чынам,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{S'(x)}{S(x)} \quad \text{або} \quad (\ln f(x))' = (\ln S(x))'.$$

Паколькі функцыі $\ln f(x)$ і $\ln S(x)$ маюць аднолькавыя вытворныя і роўныя значэнні пры $x = 0$, то яны роўныя паміж сабою. Значыць, $S(x) = f(x)$, г. зн.

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots (-1<x<1) \qquad (10)$$

Заўвага. На канцах прамежку збежнасці біномны шэраг паводзіць сябе наступным чынам:

1) Пры $x = 1$ шэраг абсалютна збягаецца, калі $m > 0$; неабсалютна збягаецца, калі $-1 < m < 0$; разбягаецца, калі $m \le -1$;

2) Пры $x = -1$ шэраг абсалютна збягаецца, калі $m > 0$, і разбягаецца, калі $m < 0$.

Адзначым некаторыя прыватныя выпадкі біномнага шэрагу, якія адпавядаюць $m = 1/2$ і $m = -1/2$:

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot4}x^2 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3 - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4 + \dots \quad (-1 \le x \le 1),$$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2 - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3 + \dots \quad (-1 < x \le 1), \qquad (11)$$

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6 + \dots \quad (-1 < x < 1). \qquad (12)$$

Заўвага. Метадам, які мы скарысталі для атрымання біномнага шэрагу, можна атрымаць расклад у ступеневы шэраг функцый $\sin x$, $\cos x$, e^x. Сапраўды, няхай, напрыклад, $f(x) = e^x$. Адпаведны

шэраг Маклорэна для функцыі $f(x)$ мае выгляд:

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

Гэты шэраг збягаецца для ўсіх x. Пазначым яго суму $S(x)$, г. зн.

$$S(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

Шляхам пакладовага дыферэнцавання атрымліваем відавочную роўнасць $S(x)=S'(x) \quad \forall x$.

А тады для вытворнай здабытку $S(x)\cdot e^{-x}$ будзем мець:

$$\left(S(x)\cdot e^{-x}\right)'=\left[S'(x)-S(x)\right]\cdot e^{-x}=0 \qquad \forall x.$$

Значыць, $S(x)\cdot e^{-x}$ ёсць канстанта; улічваючы, што $S(0)=1$, маем канчаткова

$$S(x)\cdot e^{-x}=1 \quad \text{, або} \quad S(x)=e^x.$$

6.5. Расклад адваротных трыганаметрычных функцый

Шляхам пакладовага інтэгравання шэрагу (12) і геаметрычнай прагрэсіі

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}+\cdots \quad (-1<x<1)$$

атрымліваем:

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots \qquad (-1\le x\le 1), \qquad (13)$$

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots \qquad (-1<x\le 1). \qquad (14)$$

Заўважым, што, як і для лагарыфмічнай функцыі, справядлівасць формул (13) і (14) пры $x=1$, $x=-1$ устанаўліваецца дадаткова з дапамогай тэарэмы Абеля п. 4.4 .

Збежнасць шэрагу (13) на канцах адрэзка $[-1, 1]$ высвятляецца з дапамогай прыметы Раабэ.

У прыватнасці, пры $x=1$ атрымліваем

$$\frac{\pi}{2}=\arcsin 1=1+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}+\cdots$$

Расклады ў ступеневы шэраг функцый $\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$ і $\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x$ атрымліваюцца з судачыненняў (13) і (14).

6.6. Табліца шэрагаў асноўных элементарных функцый

Пададзім зараз табліцу шэрагаў асноўных элементарных функцый, якія найбольш часта сустракаюцца ў тэарэтычных

даследаваннях і практычных дастасаваннях. Гэтую табліцу пажадана запомніць.

1. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ $(-\infty < x < +\infty)$

2. $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $(-\infty < x < +\infty)$

3. $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ $(-\infty < x < +\infty)$

4. $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ $(-1 < x \le 1)$

5. $(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!} x^k$ $(-1 < x < +1)$

(аб паводзінах біномнага шэрагу пры $|x|=1$ сказана ў п. 6.4).

6. $\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ $(-1 < x \le 1)$

7. $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ $(-1 < x < 1)$

Звяртаем ўвагу на тую акалічнасць, што шэрагі няцотных функцый $\sin x$, $\operatorname{sh} x$ утрымліваюць толькі няцотныя ступені, а шэрагі цотных функцый $\cos x$, $\operatorname{ch} x$ — толькі цотныя ступені. Ці выпадкова гэта?

Калі функцыя $f(x)$ цотная, то яе вытворная $f'(x)$ будзе няцотнай; значыць, $f'(x) = -f'(-x)$, адкуль пры $x=0$ атрымаем роўнасць $f'(0) = -f'(0)$, г. зн. $f'(0) = 0$. Калі ж $f(x)$ няцотная, то $f(0)=0$ і $f'(x)$ - цотная функцыя, значыць, $f''(x)$ - няцотная; адкуль вынікае, што $f''(0)=0$ і г. д.

Такім чынам, прыходзім да наступнай высновы:

Шэраг Маклорэна цотнай функцыі ўтрымлівае толькі цотныя ступені x , а шэраг Маклорэна няцотнай функцыі - толькі няцотныя ступені x .

6.7. Аб формулах Эйлера і ўзаемасувязі элементарных функцый

Калі ў шэраг

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

замест рэчаіснай зменнай x падставіць камплексную зменную ix, то, групуючы адпаведным чынам складнікі шэрагу і ўлічваючы, што $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$ і г. д., атрымаем

$$e^{ix}=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\frac{(ix)^5}{5!}+\dots=$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots\right)$$

г. зн.

$$\boxed{e^{ix}=\cos x+i\sin x}$$

Гэта і ёсць знакамітая формула Эйлера, якая ўпершыню з'явілася ў пісьме Эйлера да І.Бернулі ў 1743 годзе.

З формулы Эйлера вынікае, што

$$\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right),$$

$$\sin x=\frac{1}{2}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right).$$

Падкрэслім, што мы атрымалі формулу Эйлера шляхам фармальнай падстаноўкі камплекснай зменнай ix замест x.

Гэты метад можна сапраўды абгрунтаваць, калі больш падрабязна разгледзіць камплексныя шэрагі.

Заўважым, што камплексная функцыя e^{ix} мае (у адрозненне ад рэчаіснай паказнікавай функцыі) "нечаканыя" уласцівасці. Напрыклад, яна з'яўляецца перыядычнай функцыяй з перыядам $2\pi i$:

$$e^{i(x+2\pi)}=e^{ix}$$

З формулы Эйлера пры $x=\pi$ вынікае дзіўнае судачыненне

$$e^{i\pi}=-1,$$

якое звязвае важнейшыя канстанты розных раздзелаў матэматыкі (-1 — арыфметыка, π — геаметрыя, e — аналіз, i - алгебра).

Формула Эйлера высвятляе сувязь паміж паказнікавай і трыганаметрычнымі функцыямі.

Адзначым яшчэ цікавыя аналогіі паміж шэрагамі Маклорэна, здавалася б, зусім розных функцый:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots, \qquad \operatorname{sh} x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\dots,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots, \qquad \operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\dots,$$

$$\operatorname{arctg} x=x-x^3/3+x^5/5-x^7/7+\dots, \qquad \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=x+x^3/3+x^5/5+x^7/7+\dots$$

Прычына, якая ляжыць у аснове гэтых аналогій, можа быць выяўлена пры разглядзе шэрагаў з камплекснымі каэфіцыентамі.

Практыкаванне.

1. Карыстаючыся формулай Эйлера, дакажыце наступныя роўнасці:

а) $1+\cos x+\cos 2x+\dots+\cos(n-1)x=\frac{1}{2}+\frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin x/2}$,

б) $\sin x+\sin 2x+\dots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin x/2}$,

в) $\cos x+\cos 3x+\dots+\cos(2n-1)x=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}$.

6.8. Сімвалічны запіс формулы Тэйлара

Формулу Тэйлара для адвольнай функцыі $f(x)$

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dots$$

можна запісаць у сімвалічнай форме, калі скарыстаць расклад у ступеневы шэраг паказнікавай функцыі

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots$$

Сапраўды, мае месца судачыненне

$$f(x)=e^{(x-x_0)\frac{d}{dx}}\cdot f(x_0),$$

дзе сімвалічны выраз $e^{(x-x_0)d/dx}$ патрэбна распісаць паводле правіла раскладу паказнікавай функцыі ў ступеневы шэраг, а здабыткі $\frac{d^n}{dx^n}\cdot f(x_0)$ лічыць роўнымі вытворнай $f^{(n)}(x_0)=\frac{d^nf}{dx^n}$.

Сімвалічная форма запісу формулы Тэйлара, якая бярэ пачатак ад Лагранжа (1772), набыла шырокае распаўсюджванне, дзякуючы Гамільтону.

Сімвалічны запіс формулы Тэйлара яскрава падкрэслівае надзвычай важную ролю, якая належыць паказнікавай функцыі ў матэматычным аналізе.

6.9. Множанне і дзяленне ступеневых шэрагаў

Нагадаем, што ступеневы шэраг абсалютна збягаецца на інтэрвале збежнасці. Тэарэма аб множанні абсалютна збежных

шэрагаў у прымяненні да ступеневых шэрагаў дае наступны вынік.

Няхай

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \qquad \text{пры} \qquad |x| < \alpha,$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \qquad \text{пры} \qquad |x| < \beta.$$

Тады

$$f(x) \cdot g(x) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) =$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} a_j b_k\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right) x^n$$

пры $|x| < \gamma$, дзе $\gamma = \min(\alpha; \beta)$.

У прыватным выпадку, калі абодва множнікі аднолькавыя, атрымаем наступную формулу падвышэння да квадрату ступеневага шэрагу:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \dots + a_n a_0) x^n.$$

Прыклад 1. Памножыць наступныя шэрагі:

$$\ln \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \qquad (|x| < 1),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \qquad (|x| < 1).$$

△ Пры $|x| < 1$ маем

$$\frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x} = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots\right) \cdot \left(1 + x + x^2 + x^3 + \dots\right) =$$

$$= x \cdot 1 + \left(x \cdot x + \frac{x^2}{2} \cdot 1\right) + \left(x \cdot x^2 + \frac{x^2}{2} \cdot x + \frac{x^3}{3} \cdot 1\right) +$$

$$+ \left(x \cdot x^3 + \frac{x^2}{2} \cdot x^2 + \frac{x^3}{3} \cdot x + \frac{x^4}{4} \cdot 1\right) + \dots =$$

$$= x + \left(1 + \frac{1}{2}\right) x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) x^3 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) x^4 + \dots$$

У выніку атрымалася цікавая роўнасць

$$\frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\right) x^n, \text{ дзе } |x| < 1. \qquad ▲$$

Разгледзім зараз аперацыю дзялення ступеневых шэрагаў.

Няхай зноў

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \qquad (|x| < \alpha),$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \qquad (|x| < \beta).$$

Даказваецца наступнае сцвярджэнне:

> Калі $a_0 \neq 0$, то дзель
> $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots}$$
> можна падаць у выглядзе ступеневага шэрагу
> $$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$
> тады і толькі тады, калі $b_0 \neq 0$.

Адзначым пры гэтым, што прамежак збежнасці новага шэрагу $\sum c_k x^k$, які атрымліваецца ў выніку дзялення, цяжка вызначыць; ён можа аказацца значна менш, чым абодва прамежкі збежнасці $(-\alpha, \alpha)$ і $(-\beta, \beta)$. Каб знайсці каэфіцыенты $c_0, c_1, c_2, \dots,$ патрэбна перамножыць шэрагі $\sum b_j x^j$ і $\sum c_k x^k$ і прыраўняць адпаведныя каэфіцыенты гэтага здабытку і каэфіцыенты шэрагу $\sum a_j x^j$. Такім чынам, атрымаем роўнасці

$$a_0 = b_0 c_0$$
$$a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1$$
$$a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2$$
$$\dots\dots\dots$$

Адкуль паслядоўна знаходзім $c_0 = \frac{a_0}{b_0}$, $c_1 = \frac{a_1 - b_1 c_0}{b_0} = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2}$ і г. д.

<u>Прыклад 2.</u> Падзяліць шэраг $1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$ на шэраг $1 - x + \sum_{k=2}^{\infty} b_k x^k$,

дзе $a_k = 0$ і $b_k = 0$ пры $k \geq 2$.

$\triangle$ Абодва шэрагі маюць радыус збежнасці $R = +\infty$ і ўяўляюць сабой біномы $1 + x$ і $1 - x$. Пры дзяленні гэтых шэрагаў атрымаем

$$\frac{1 + x}{1 - x} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots,$$

дзе каэфіцыенты $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots$ знаходзім з судачынення

$$1 + x = (1 - x) \cdot (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots).$$

Прыраўноўваючы адпаведныя каэфіцыенты, маем

$$1 = c_0, \quad 1 = c_1 - c_0,$$
$$0 = c_2 - c_1, \quad 0 = c_3 - c_2, \quad \dots$$

Такім чынам, $c_0 = 1$, $c_k = 2$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ і

$$\frac{1+x}{1-x} = 1+2x+2x^2+2x^3+\cdots,$$

прычым радыус збежнасці гэтага шэрагу $R=1$, нягледзячы на тое, што зыходныя шэрагі мелі бясконцы радыус збежнасці.

Зразумела, што такі ж вынік мы атрымаем, калі скарыстаем вядомае судачыненне для геаметрычнай прагрэсіі

$$1+x+x^2+x^3+\cdots = \frac{1}{1-x} \qquad (|x|<1).$$

Тады маем

$$\frac{1+x}{1-x} = 1+2x\frac{1}{1-x} = 1+2x+2x^2+2x^3+\cdots$$

для $-1<x<1$. ▲

6.10. Падстанова шэрагу у шэраг

Няхай

$$y=f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (-R<x<R). \tag{15}$$

Разгледзім, акрамя таго, функцыю $\varphi(y)$, якая раскладваецца ў ступеневы шэраг

$$\varphi(y)=\sum_{m=0}^{\infty} b_m y^m \qquad (-\rho<y<\rho). \tag{16}$$

Калі $|f(x)|<\rho$ $\forall x\in(-R,R)$, то мае сэнс складаная функцыя $\varphi(f(x))$. Даказваецца, што складаная функцыя $\varphi(f(x))$ таксама раскладваецца ў наваколлі пункта $x=0$ у шэраг па ступенях x, прычым,гэты шэраг можна атрымаць шляхам падстановы ў шэраг (16) замест y шэрагу (15), а затым - падвышэння ў ступень і аб'яднання падобных складнікаў.

Прыклад 3. Знайсці некалькі першых складнікаў раскладу функцыі $f(x)=e^{\sin x}$ у шэраг па ступенях x.

△ Маем для ўсіх x

$$e^{\sin x} = 1+\frac{\sin x}{1!}+\frac{\sin^2 x}{2!}+\frac{\sin^3 x}{3!}+\cdots$$

Шляхам памнажэння шэрагаў знаходзім расклад у ступеневы шэраг $\sin^2 x$, $\sin^3 x$, . . .

Атрымліваем :

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\cdots,$$

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)\cdot\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) =$$

$$= x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + \left(\frac{1}{(3!)^2} + \frac{2}{5!}\right)x^6 + \dots = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \dots ,$$

$$\sin^3 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots\right)\cdot\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 - \dots\right) =$$

$$= x^3 + \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)x^5 + \left(\frac{2}{45} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{120}\right)x^7 + \dots = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{13}{120}x^7 + \dots$$

і г.д.

Відавочна, што расклад $\sin^k x$ пачынаецца са складніка x^k. Вось чаму, каб атрымаць у раскладзе функцыі $e^{\sin x}$ ступень x^k, дастаткова абмежавацца складнікам $\frac{1}{k!}\sin^k x$.

Канчаткова маем, калі абмежавацца пятай ступенню:

$$e^{\sin x} = \left(1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{6} + \dots\right) + \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{x^5}{12} + \dots\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{24}x^4 + \dots\right) + \left(\frac{1}{120}x^5 + \dots\right) + \dots = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + \dots \quad ▲$$

6.11. Рэкамендацыі па практычнаму раскладанню функцый у ступеневыя шэрагі

Пры знаходжанні раскладу дадзенай бясконца дыферэнцавальнай функцыі $f(x)$ у ступеневы шэраг прымяняюць розныя метады. Магчымасць скарыстання мноства метадаў грунтуецца на тэарэме адзінасці, якая сцвярджае, што:

> Атрыманы любым спосабам расклад функцыі $f(x)$ у ступеневы шэраг будзе яе раскладам у шэраг Тэйлара
>
> $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Пры практычным знаходжанні шэрагу Тэйлара (Маклорэна) скарыстоўваюць наступныя метады:

1. Непасрэдна знаходзяць каэфіцыенты Тэйлара $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ шляхам шматразовага дыферэнцавання функцыі. Затым даследуюць, пры якіх x рэшткавы складнік формулы Тэйлара $R_n(x)$ імкнецца да нуля, калі $n \to +\infty$, інакш кажучы, правяраюць выкананне неабходнай і дастатковай умовы раскладальнасці функцыі ў ступеневы шэраг. Такое даследаванне рабіць неабходна, бо шэраг Тэйлара, як вядома, можа разбягацца або мець суму $S(x) \neq f(x)$.

Пералічаныя дадатковыя даследаванні робяць прымяненне

гэтага ўніверсальнага метаду ў многіх выпадках немэтазгодным.

2. Каб пазбегнуць складанасцей шматразовага дыферэнцавання і ацэнкі рэшткавага складніка, скарыстоўваюць гатовыя расклады асноўных элементарных функцый у спалучэнні з арыфметычнымі дзеяннямі над ступеневымі шэрагамі, а таксама інтэграваннем і дыферэнцаваннем гэтых шэрагаў.

Праілюструем вышэйсказанае на канкрэтных прыкладах.

Прыклад 4. Раскласці ў шэраг Маклорэна функцыю

$$f(x)=e^x\cdot\sin x.$$

△ Знойдзем вытворныя функцыі $f(x)$ у пункце $x=0$:

$$f(x)=e^x\cdot\sin x\,,\qquad f(0)=0$$

$$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}\,e^x\sin(x+\pi/4),\qquad f'(0)=\sqrt{2}\,\sin\pi/4$$

$$f''(x)=\sqrt{2}\,e^x\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=(\sqrt{2})^2e^x\sin\left(x+2\frac{\pi}{4}\right),\qquad f''(0)=(\sqrt{2})^2\sin\frac{2\pi}{4}$$

Калі доўжыць працэс дыферэнцавання, то заўважым, што для ўсіх k

$$f^{(k)}(x)=(\sqrt{2})^ke^x\sin\left(x+\frac{k\pi}{4}\right),\qquad f^{(k)}(0)=(\sqrt{2})^k\sin\frac{k\pi}{4}$$

$$(k=0,1,2,\ldots).$$

Такім чынам, шэраг Маклорэна для функцыі $f(x)=e^x\sin x$ мае выгляд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^k\sin\frac{k\pi}{4}}{k!}\,x^k.$$

Каб пераканацца ў тым, што сума атрыманага шэрагу сапраўды ёсць $f(x)$, неабходна і дастаткова даказаць выкананне для рэшткавага складніка $R_n(x)$ формулы Маклорэна ўмовы:

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

Узяўшы $R_n(x)$ у форме Лагранжа, маем

$$|R_{n-1}(x)|=\left|\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\,x^n\right|=\left|\frac{(\sqrt{2})^ne^c\cdot\sin\left(c+\frac{n\pi}{4}\right)}{n!}\,x^n\right|\le$$

$$\le\frac{(\sqrt{2})^ne^{|x|}}{n!}\,|x|^n,$$

паколькі c ляжыць паміж 0 і x.

Пры любым фіксаваным x

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2}\,|x|)^n}{n!}=0$$

(мы скарысталі вядомы ліміт $\lim a^n/n!=0$ $\forall a$). Вось чаму

неабходная і дастатковая ўмова раскладальнасці функцыі ў ступеневы шэраг задавальняецца, і мы можам запісаць роўнасць

$$e^x \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^k \sin\frac{k\pi}{4}}{k!} x^k \quad (-\infty < x < +\infty). \quad \blacktriangle$$

Прыклад 5. Раскласці ў шэраг Тэйлара па ступенях $x-1$ функцыю $f(x) = e^{2x}$

$\triangle$Перапішам $f(x)$ у выглядзе

$$f(x) = e^2 \cdot e^{2(x-1)}$$

Паколькі

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

то, замяніўшы ў апошняй роўнасці x на $2(x-1)$, будзем мець

$$e^{2(x-1)} = 1 + 2(x-1) + \frac{2^2}{2!}(x-1)^2 + \dots + \frac{2^n}{n!}(x-1)^n + \dots$$

Такім чынам,

$$e^{2x} = e^2 + 2e^2(x-1) + \frac{2^2}{2!}e^2(x-1)^2 + \dots + \frac{2^n}{n!}e^2(x-1)^n + \dots$$

$$(-\infty < x < +\infty). \quad \blacktriangle$$

Прыклад 6. Знайсці расклад у шэраг Маклорэна функцыі

$$f(x) = \frac{3x}{2x^2 + x - 1}.$$

$\triangle$Раскладваем функцыю на прасцейшыя дробы:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-2x}.$$

Як вядома,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \qquad (-1 < x < 1),$$

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k \qquad (-1/2 < x < 1/2).$$

Канчаткова маем:

$$\frac{3x}{2x^2 + x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k + 2^k\right] x^k \quad \left(-\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{1}{2}\right). \quad \blacktriangle$$

Прыклад 7. Раскласці ў шэраг Маклорэна функцыю

$$f(x) = (1 + x) \cdot \ln(1 + x).$$

$\triangle$Знойдзем вытворную функцыі $f(x)$:

$$f'(x) = 1 + \ln(1 + x).$$

Скарыстаўшы расклад ў ступеневы шэраг функцыі $\ln(1+x)$, маем

$$f'(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \qquad (-1 < x \le 1)$$

Інтэгруем паскладова апошнюю роўнасць у межах ад 0 да x і, улічваючы, што $f(0)=0$, атрымаем

$$f(x)=x+\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\dots=x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$$

$$(-1\le x\le 1).$$

Заўважым, што згодна з тэарэмай Абеля(п. 4.4) атрыманая роўнасць мае месца і ў пункце $x=-1$, паколькі ў гэтым пункце шэраг збягаецца.

Зразумела, што той жа вынік можна было атрымаць шляхам памнажэння шэрагаў:

$$(1+x)\ln(1+x)=(1+x)\cdot\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\dots\right)=$$

$$=x+\left(1-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)x^3+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)x^4+\dots=x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{k+1}}{k(k+1)}.\quad\blacktriangle$$

Прыклад 8. Знайсці чатыры першыя адрозныя ад нуля складнікі шэрагу Маклорэна функцыі $f(x)=1/\cos x$.

$\triangle$ Як вядома,

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots\qquad(-\infty<x<+\infty).$$

Скарыстаем аперацыю дзялення ступеневых шэрагаў. Умовы сцвярджэння п. 6.9, каб падаць дзель у выглядзе ступеневага шэрагу, задавальняюцца. Няхай

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1-x^2/2!+x^4/4!-x^6/6!+\dots}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\dots$$

Такім чынам,

$$1=(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\dots)\cdot\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\right).$$

Памнажаючы гэтыя шэрагі і прыраўноўваючы каэфіцыенты пры аднолькавых ступенях x (мы абмяжоўваемся шостай ступенню), маем:

$$\begin{array}{c|l}
x^0 & 1=c_0\\
x^1 & 0=c_1\\
x^2 & 0=-1/2!\,c_0+c_2\\
x^3 & 0=-1/2!\,c_1+c_3\\
x^4 & 0=1/4!\,c_0-1/2!\,c_2+c_4\\
x^5 & 0=1/4!\,c_1-1/2!\,c_3+c_5\\
x^6 & 0=-1/6!\,c_0+1/4!\,c_2-1/2!\,c_4+c_6\\
\dots & \dots
\end{array}$$

Адсюль паслядоўна знаходзім

$$c_0 = 1,\ c_1 = 0,\ c_2 = \frac{1}{2},\ c_3 = 0,\ c_4 = \frac{5}{24},\ c_5 = 0,\ c_6 = \frac{61}{720}, \dots$$

Канчаткова атрымліваем для функцыі $f(x) = 1/\cos x$ шэраг Маклорэна

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \dots$$

Заўважым, што можна было спрасціць вылічэнні, паколькі з цотнасці функцыі $f(x)$ вынікае, што ўсе каэфіцыенты з няцотнымі індэксамі $c_{2k+1} = 0$.

Паколькі мы не ведаем каэфіцыенты c_k пры любых k, то прамежак збежнасці атрыманага шэрагу цяжка вызначыць. Гэтая задача рашаецца надзвычай проста, калі скарыстаць метады тэорыі функцый камплекснай зменнай. У дадзеным выпадку прамежкам збежнасці шэрагу з'яўляецца інтэрвал $(-\pi/2,\ \pi/2)$.

Укажам яшчэ адзін штучны прыём, які спрашчае выкладкі ў дадзеным выпадку.

Пазначым

$$\cos x = 1 - z.$$

Тады

$$z = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots$$

З другога боку,

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

Метадам падвышэння да ступені шэрагаў маем:

$$z^2 = \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{24} + \dots, \qquad z^3 = \frac{x^6}{8} + \dots$$

А тады шляхам падстаноўкі шэрагаў у шэраг атрымліваем:

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \dots$$ ▲

Практыкаванні.

1. Знайдзіце першыя тры адрозныя ад нуля складнікі шэрагу Маклорэна наступных функцый:

а) $f(x) = \sqrt{1+\sin x}$, б) $f(x) = \sin x \cdot \cos\sqrt{x}$,

в) $f(x) = e^{\cos x}$, г) $f(x) = (1+x)\,\mathrm{arctg}\,x$.

2. Запішыце для функцыі $f(x)$ першыя 3 складнікі шэрагу Тэйлара у пункце x_0, калі:

а) $f(x) = \sin x, \quad x_0 = \pi/4$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x_0 = \pi/4$,

в) $f(x) = \ln(x+2), \quad x_0 = 1$.

3. Знайдзіце шэраг Маклорэна функцыі $f(x) = \operatorname{arctg} x$ шляхам непасрэднага вылічэння каэфіцыентаў шэрагу.

4. Знайдзіце шэраг Маклорэна функцыі $f(x) = \arcsin x$ шляхам непасрэднага вылічэння каэфіцыентаў шэрагу.

5. Карыстаючыся раскладам у шэраг асноўных элементарных функцый, знайдзіце расклад у ступеневы шэраг па ступенях x наступных функцый і вызначце інтэрвалы збежнасці атрыманых шэрагаў:

а) $f(x) = 2^x$, б) $f(x) = \sin^2 x$,

в) $f(x) = \dfrac{3x+1}{(x-2)^2}$, г) $f(x) = \dfrac{3x-4}{x^2-3x+2}$,

д) $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$, е) $f(x) = \ln(x^2+3x+2)$,

ж) $f(x) = \sin 2x \cdot \cos 2x$, з) $f(x) = \sin 2x + 2x\cos 2x$,

і) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x^2}}{x^2}, & \text{калі } x \neq 0, \\ 1, & \text{калі } x = 0. \end{cases}$

6. Знайдзіце расклад у ступеневы шэраг Маклорэна дадзеных функцый:

а) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, б) $f(x) = \int_0^x \dfrac{\sin t}{t}\,dt$,

в) $f(x) = \int_0^x \cos t^2\,dt$.

7. Знайдзіце сумы наступных лікавых шэрагаў:

а) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k/k!$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/3^n n!$, в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$,

г) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{1}{3^k (2k)!}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$, е) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n/(2n+1)$.

8. Запішыце шэраг Тэйлара для функцыі $f(x) = 1/x$

а) па ступенях $x-3$,

б) па ступенях $x+2$

9. Раскладзіце функцыю $f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}$ у шэраг па ступенях $x-2$

10. Раскладзіце у шэраг Тэйлара па ступенях $x+2$ наступныя функцыі:

а) $f(x)=e^{x}$,

б) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+7}$

11. Карыстаючыся раскладам функцыі $f(x)$ у шэраг Маклорэна, знайдзіце вытворную $f^{(n)}(0)$, калі:

а) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$, $n=7$ в) $f(x)=x^6e^x$, $n=10$

б) $f(x)=x^2\sqrt[4]{1+x}$, $n=5$.

12. Дакажыце, скарыстаўшы шэрагі Тэйлара, наступныя роўнасці:

а) $\sin(a+x)=\sin a\cdot\cos x+\cos a\cdot\sin x$,

б) $\sin(a-x)=\sin a\cdot\cos x-\cos a\cdot\sin x$,

в) $\cos(a+x)=\cos a\cdot\cos x-\sin a\cdot\sin x$.

13. Знайдзіце шэраг Маклорэна функцыі $f(x)=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ і, скарыстаўшы яго, вызначце суму лікавага шэрагу

$$1+\frac{4}{2}+\frac{9}{4}+\ldots+\frac{n^2}{2^{n-1}}+\ldots$$

14. Шляхам памнажэння шэрагаў знайдзіце тры першыя адрозныя ад нуля складнікі раскладу ў ступеневы шэраг па ступенях x наступных функцый:

а) $f(x)=(\operatorname{arctg} x)^2$,

б) $f(x)=e^{-x}\cdot\sin x$,

в) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}\ln(1-x)$.

15. Шляхам падстановы шэрагу ў шэраг знайдзіце чатыры складнікі шэрагу Маклорэна наступных функцый:

а) $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{1-x^2}-1\right)$,

б) $f(x)=\ln(1+\sin x)$.

7. ДАДАТАК

Зараз мы разгледзім некалькі пытанняў, якія цесна звязаны з паняццем раўнамернай збежнасці шэрагаў і паслядоўнасцей.

7.1. Тэарэма Вейерштраса

У 1885 годзе Вейерштрас даказаў знакамітае сцвярджэнне, якое можна сфармуляваць наступным чынам:

Тэарэма Вейерштраса. Усякая непарыўная на адрэзку $[a,b]$ функцыя $f(x)$ ёсць сума раўнамерна збежнага на гэтым адрэзку шэрагу, складнікі якога з'яўляюцца мнагаскладамі:

$$f(x) = P_1(x) + P_2(x) + \cdots + P_n(x) + \cdots$$

Тэарэтычныя вынікі тэарэмы Вейерштраса надзвычай значныя і цалкам адпавядаюць таму ўраджанню, якое зрабіла ў свой час адкрыццё Вейерштраса. Сапраўды, тэарэма сцвярджае, што для любой непарыўнай функцыі $f(x)$ існуе многаскладовы шэраг, які раўнамерна збягаецца да $f(x)$. Клас непарыўных функцый надта шырокі, ён утрымлівае і функцыі, якія не маюць вытворнай ні ў адным пункце. Зразумела, што любую непарыўную функцыю нельга падаць у выглядзе ступеневага шэрагу, паколькі неабходнай умовай раскладальнасці функцыі ў ступеневы шэраг, як вядома (п.10.3), з'яўляецца яе бясконцая дыферэнцавальнасць. Але нават не ўсякая бясконца дыферэнцавальная функцыя раскладваецца ў ступеневы шэраг — што ж тады чакаць ад проста непарыўнай функцыі.

Сітуацыя, як вынікае з тэарэмы Вейерштраса, карэнным чынам мяняецца, калі замест ступеневых шэрагаў разглядаць шэрагі, складнікамі якіх з'яўляюцца мнагасклады. Ступеневыя шэрагі і многаскладовыя шэрагі падобныя паміж сабой тым, што любыя іх частковыя сумы з'яўляюцца, відавочна, мнагаскладамі. Розніца заключаецца ў тым, што n-я частковая сума ступеневага

шэрагу ёсць многасклад $\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ не вышэй як $(n-1)$-й ступені, прычым $(n+1)$-я частковая сума $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ адрозніваецца ад n-й частковай сумы шэрагу толькі адным складнікам $a_n x^n$, а ўсе папярэднія складнікі $a_k x^k$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ у гэтых сумах аднолькавыя. У сваю чаргу, n-я частковая сума $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P_k(x)$ многаскладовага шэрагу можа быць (і з'яўляецца ў сапраўднасці) многаскладам значна большай ступені, чым n. Калі n-ю і $(n+1)$-ю частковыя сумы многаскладовага шэрагу запісаць у выглядзе многаскладаў ($S_n(x) = \sum b_k x^k$ і $S_{n+1}(x) = \sum b'_k x^k$), то ўжо нельга сцвярджаць, што яны адрозніваюцца толькі адным складнікам, больш таго, гэтыя сумы ўвогуле могуць не ўтрымліваць аднолькавых складнікаў; акрамя таго ступень многаскладу $S_{n+1}(x)$ можа быць значна большай, чым ступень многаскладу $S_n(x)$.

Такім чынам, частковыя сумы $S_n(x)$ многаскладовага шэрагу $\sum P_k(x)$ не могуць, увогуле кажучы, з'яўляцца частковымі сумамі аднаго і таго ж ступеневага шэрагу.

Відавочна, што тэарэму Вейерштраса можна падаць у наступным выглядзе:

> Калі $f(x)$ ёсць непарыўная функцыя на адрэзку $[a, b]$, то $\forall \varepsilon > 0$ існуе многасклад $Q(x)$ такі, што $|f(x) - Q(x)| < \varepsilon$ $(a \le x \le b)$.

Адсюль вынікае, што многасклады займаюць асаблівае становішча ў класе непарыўных функцый. З аднаго боку, яны маюць надта простую будову, а з другога боку, яны здольныя як заўгодна дакладна перадаваць паводзіны любой непарыўнай функцыі, якой складанай яна б ні была.

Вынік. Тэарэма Вейерштраса сцвярджае, што любая непарыўная функцыя ёсць сума раўнамерна збежнага шэрагу многаскладаў. Заўважым, што мае месца і адваротнае сцвярджэнне (гл. п. 3.3): усякая функцыя, якая з'яўляецца сумай раўнамерна збежнага на адрэзку $[a, b]$ многаскладовага шэрагу есць непарыўная на гэтым

адрэзку. Такім чынам, сцвярджэнне, што $f(x)$ есць сума раўнамерна збежнага на адрэзку $[a,b]$ шэрагу многаскладаў, і сцвярджэнне, што $f(x)$ есць непарыўная функцыя на адрэзку $[a,b]$, з'яўляюцца эквівалентнымі сцвярджэннямі.

Мы ўжо згадвалі, што Вейерштрас даказаў сваю тэарэму ў 1885 г. У сувязі з гэтым цікава адзначыць, што яшчэ ў 1858 г. гэтай тэарэмай амаль што поўнасцю валодаў Чабышоў, які даследаваў праблему пабудовы многаскладаў найлепшага набліжэння. Укажам сціісла сутнасць гэтай праблемы.

Няхай $f(x)$ есць непарыўная функцыя на адрэзку $[a,b]$, а $\mathcal{P}_n$ – мноства многаскладаў ступені $\le n$. Калі мнагасклад $P_n(x)\in\mathcal{P}_n$, то лік

$$E_n(f,P_n)=\max_{a\le x\le b}|f(x)-P_n(x)|$$

называюць адхіленнем многаскладу $P_n(x)$ ад дадзенай функцыі $f(x)$ на адрэзку $[a,b]$. Велічыня

$$E_n(f)=\inf_{P_n\in\mathcal{P}_n}E_n(f,P_n)=\inf_{P_n\in\mathcal{P}_n}\max_{a\le x\le b}|f(x)-P_n(x)|$$

называецца найменшым адхіленнем n-й ступені. Відавочна, што ніжняя мяжа існуе, але далека не відавочна, ці дасягаецца гэтая мяжа, г.зн. ці існуе многасклад $P_n^*(x)\in\mathcal{P}_n$ такі, што

$$E_n(f,P_n^*)=E_n(f).$$

Чабышоў даказаў існаванне і адзінасць многаскладу $P_n^*(x)$ для любой непарыўнай функцыі і даследаваў метады пабудовы такіх многаскладаў, якія атрымалі назву многаскладаў найлепшага набліжэння або многаскладаў Чабышова.

Відавочна, што з ростам n велічыня E_n спадае:

$$E_1\ge E_2\ge E_3\ge\cdots\ge E_n\ge\cdots$$

Каб атрымаць тэарэму Вейерштраса, Чабышову дастаткова было даказаць, што $\lim\limits_{n\to\infty}E_n=0$, але заняты дакладным вызначэннем найлепшага набліжэння, ён пакінуў без увагі гэтае пытанне.

7.2. Збежнасць у сярэднім функцыйных паслядоўнасцей і шэрагаў

Зараз мы разгледзім яшчэ адзін тып збежнасці функцыйных паслядоўнасцей і шэрагаў — збежнасць у сярэднім. У мэтах спрашчэння фармулёвак будзем лічыць, што ўсе функцыі, якія сустракаюцца ніжэй, з'яўляюцца інтэгравальнымі на адрэзку $[a, b]$.

Азначэнне 1. Будзем гаварыць, што функцыйная паслядоўнасць $(f_n(x))$ збягаецца ў сярэднім на адрэзку $[a, b]$ да функцыі $f(x)$, калі $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0$.

Азначэнне 2. Будзем гаварыць, што функцыйны шэраг $\sum u_k(x)$ збягаецца ў сярэднім на адрэзку $[a, b]$ да сумы $S(x)$, калі паслядоўнасць яго частковых сум $S_n(x)$ збягаецца ў сярэднім на адрэзку $[a, b]$ да функцыі $S(x)$, г.зн., калі

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n u_k(x) - S(x) \right]^2 dx = 0$$

Высветлім сувязь паміж збежнасцю ў сярэднім і іншымі тыпамі збежнасці функцыйных паслядоўнасцей.

Калі паслядоўнасць $(f_n(x))$ збягаецца на адрэзку $[a, b]$ да лімітавай функцыі $f(x)$, то адсюль неабавязкова вынікае збежнасць у сярэднім гэтай паслядоўнасці да $f(x)$. Сапраўды, разгледзім паслядоўнасць $f_n(x) = \sqrt{2nx} \cdot e^{-\frac{1}{2}nx^2}$ Відавочна, што

$$f_n(x) = \sqrt{2nx}\, e^{-\frac{1}{2}nx^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = 0 \qquad \forall x \in [0, 1],$$

але

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 [f_n(x) - f(x)]^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 2nx\, e^{-nx^2} dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(-e^{-nx^2} \Big|_0^1 \right) = \lim_{n\to\infty} (1 - e^{-n}) = 1.$$

Справа карэнным чынам мяняецца, калі звычайную збежнасць паслядоўнасці $(f_n(x))$ замяніць раўнамернай збежнасцю на адрэзку $[a, b]$. Мае месца наступнае сцвярджэнне:

Калі $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на адрэзку $[a, b]$, то гэтая паслядоўнасць збягаецца да $f(x)$ і ў сярэднім на адрэзку $[a, b]$.

Адваротнае сцвярджэнне ўжо не выконваецца, г. зн. са збежнасці паслядоўнасці ў сярэднім на адрэзку $[a, b]$ не вынікае яе раўнамерная збежнасць на гэтым адрэзку. Больш таго,

> паслядоўнасць можа збягацца ў сярэднім на адрэзку $[a, b]$, але разбягацца (у звычайным сэнсе) ў кожным пункце гэтага адрэзка.

Для пабудовы прыкладу такой паслядоўнасці разгледзім паслядоўнасць адрэзкаў $J_1, J_2, \ldots, J_n, \ldots$, якія маюць наступны выгляд:

$$J_1 = [0, 1],$$

$$J_2 = [0, 1/2], \quad J_3 = [1/2, 1],$$

$$J_4 = [0, 1/4], \quad J_5 = [1/4, 2/4], \quad J_6 = [2/4, 3/4], \quad J_7 = [3/4, 1],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$J_{2^n} = [0, 1/2^n], \quad J_{2^n+1} = \left[1/2^n, \frac{2}{2^n}\right], \ldots, J_{2^{n+1}-1} = [1 - 1/2^n, 1],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Азначым зараз паслядоўнасць $(f_n(x))$ наступным судачыненнем:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{калі } x \in J_n, \\ 0, & \text{калі } x \notin J_n. \end{cases}$$

Гэтая паслядоўнасць збягаецца ў сярэднім на адрэзку $[0, 1]$ да функцыі $f(x) \equiv 0$. Сапраўды,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 [f_n(x) - f(x)]^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^2(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\text{даўжыні } J_n) = 0.$$

Аднак паслядоўнасць $(f_n(x))$ разбягаецца ў кожным пункце $x \in [0, 1]$, таму што для любога $x_0 \in [0, 1]$ існуе функцыя $f_n(x)$ з як заўгодна вялікім нумарам n, для якога $f_n(x_0) = 0$, а таксама знойдуцца іншыя як заўгодна вялікія значэнні n, для якіх $f_n(x_0) = 1$.

Як вядома (п. 3.3), не ўсякі збежны на адрэзку $[a, b]$ шэраг $\sum u_k(x)$ можна пакладова інтэграваць на гэтым адрэзку, але раўнамерная збежнасць шэрагу на $[a, b]$ з'яўляецца дастатковай

умовай пакладовага інтэгравання. Патрабаванне ж збежнасці шэрагу ў сярэднім на адрэзку $[a,b]$ не толькі не гарантуе раўнамерную збежнасць шэрагу на гэтым адрэзку, але нават і звычайную збежнасць у кожным пункце $x\in[a,b]$. Тым не менш мае месца наступнае

Сцвярджэнне. Калі функцыйны шэраг $\sum u_k(x)$ з інтэгравальнымі складнікамі збягаецца ў сярэднім да інтэгравальнай функцыі $f(x)$ на адрэзку $[a,b]$, то

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x}\Big[\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\Big]dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_k(x)\,dx$$

пры любых x_0 і $x\in[a,b]$, прычым праінтэграваны шэраг $\sum\int_{x_0}^{x}u_k(x)dx$ збягаецца раўнамерна на $[a,b]$.

Аналагічнае сцвярджэнне можна сфармуляваць і для функцыйнай паслядоўнасці $f_n(x)$, якая збягаецца ў сярэднім на адрэзку $[a,b]$.

7.3. Аднастайная непарыўнасць функцыйных паслядоўнасцей

Як вядома (тэарэма Бальцана-Вейерштраса), з любой абмежаванай лікавай паслядоўнасці можна выбраць збежную падпаслядоўнасць. Разгледзім для функцыйных паслядоўнасцей непарыўных функцый аналаг тэарэмы Бальцана-Вейерштраса. Пытанне ставіцца наступным чынам: пры якіх умовах з функцыйнай паслядоўнасці $(f_n(x))$ непарыўных на адрэзку $[a,b]$ функцый можна выбраць падпаслядоўнасць, якая раўнамерна збягаецца на гэтым адрэзку? Адказ на гэтае пытанне дае тэарэма Арцэ́ла. Перад фармулёўкай тэарэмы дадзім наступныя два азначэнні:

а) Паслядоўнасць $(f_n(x))$ называецца раўнамерна абмежаванай на адрэзку $[a,b]$, калі існуе такі лік M, што пры любых $x\in[a,b]$ і пры любых натуральных n выконваецца няроўнасць $|f_n(x)|\le M$;

б) Паслядоўнасць $(f_n(x))$ называецца аднастайна непарыўнай на адрэзку $[a,b]$, калі для любога $\varepsilon>0$ існуе $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,

што пры любых x_1 і x_2, якія належаць адрэзку $[a, b]$ і задавальняюць няроўнасць $|x_1 - x_2| < \delta$, і пры любых натуральных n выконваецца няроўнасць $|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \varepsilon$.

Дадзім кароткае тлумачэнне паняццю аднастайнай непарыўнасці.

З аднастайнай непарыўнасці паслядоўнасці $(f_n(x))$ на адрэзку $[a, b]$, відавочна, вынікае непарыўнасць кожнай функцыі $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ на $[a, b]$. Паводле азначэння непарыўнасці кожнай функцыі $f_n(x)$ на адрэзку $[a, b]$, інакш кажучы, у кожным пункце $x_0 \in [a, b]$ будзем мець:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon,$$

дзе магчымыя значэнні δ залежаць, увогуле кажучы, ад значэнняў ε, x_0 і значэння n, якое вызначае дадзеную функцыю $f_n(x)$, г. зн. $\delta = \delta(\varepsilon, x_0, n)$. Але мы ведаем (тэарэма Кантара), што з непарыўнасці функцыі на адрэзку $[a, b]$ вынікае яе раўнамерная непарыўнасць на гэтым адрэзку, г. зн. існуе δ, якое будзе вартым $\forall x_0 \in [a, b]$. Такім чынам, скарыстаўшы раўнамерную непарыўнасць, мы прыходзім да высновы, што δ можна выбраць незалежным ад x: $\delta = \delta(\varepsilon, n)$. І вось калі можна выбраць δ адно і тое ж для ўсіх n, г. зн. для ўсіх функцый $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то паслядоўнасць $(f_n(x))$ называюць аднастайна непарыўнай на адрэзку $[a, b]$. Інакш кажучы, уласцівасць аднастайнай непарыўнасці заключаецца ў тым, што непарыўнасць з'яўляецца раўнамернай не толькі адносна зменнай x, але і адносна ўсіх функцый (адносна n).

Калі маецца канечны лік непарыўных функцый на адрэзку $[a, b]$, то, відавочна, аднастайная непарыўнасць аўтаматычна мае месца. Аднак на бясконцае мноства непарыўных функцый патрабаванне аднастайнай непарыўнасці накладвае дадатковыя абмежаванні.

Адметная ўласцівасць аднастайна непарыўнай паслядоўнасці функцый складае змест наступнай тэарэмы.

<u>Тэарэма Арцэла.</u> З любой раўнамерна абмежаванай і аднастайна непарыўнай на адрэзку $[a, b]$ паслядоўнасці функцый $(f_n(x))$ можна выбраць падпаслядоўнасць, якая раўнамерна збягасцца на гэтым адрэзку.

ПЫТАННІ І ЗАДАННІ КАЛЁКВІУМА

1. Ці існуюць функцыйныя шэрагі, абсягам збежнасці якіх з'яўляюцца:

   а) толькі адзін пункт $x=a$,

   б) толькі два пункты $x=a$ і $x=b$, $a \neq b$,

   в) два адрэзкі $[a,b]$ і $[c,d]$, $a<b<c<d$.

2. Ці існуюць разбежныя шэрагі $\sum u_k(x)$ і $\sum v_k(x)$ такія, што $\forall x \in \mathbb{R}$ збягаецца шэраг:

   а) $\sum (u_k(x)+v_k(x))$,   б) $\sum u_k(x) \cdot v_k(x)$.

3. Няхай шэраг $\sum u_k(x)$ збягаецца на мностве X, а шэраг $\sum v_k(x)$ збягаецца на мностве Y. Ці можна тады сцвярджаць, што шэраг $\sum (u_k(x)+v_k(x))$ абавязкова збягаецца на мностве Z, дзе:

   а) $Z = X \cap Y$,   б) $Z = X \cup Y$.

4. Ці існуюць шэрагі $\sum u_k(x)$ і $\sum v_k(x)$, мноствам збежнасці якіх з'яўляюцца адпаведна адрэзкі $[a,b]$ і $[b,c]$, такія, што мноствам збежнасці шэрагу $\sum (u_k(x)+v_k(x))$ будзе адрэзак $[a,c]$?

5. Няхай паслядоўнасць $(f_n(x))$ збягаецца на мностве X, а функцыя $\varphi(x)$ з'яўляецца абмежаванай на гэтым мностве. Ці абавязкова вынікае адсюль збежнасць на мностве X паслядоўнасці $(\varphi(x) \cdot f_n(x))$?

6. Няхай шэраг $\sum u_k(x)$ збягаецца на мностве X, а функцыя $\varphi(x)$ з'яўляецца абмежаванай на гэтым мностве. Ці заўседы збягаецца тады на мностве X шэраг $\sum \varphi(x) \cdot u_k(x)$?

7. Няхай шэраг $\sum u_k(x)$ абсалютна збягаецца на мностве X. Ці можна тады сцвярджаць, што шэраг $\sum \varphi(x) \cdot u_k(x)$, дзе $\varphi(x)$ $(x \in X)$ ёсць абмежаваная функцыя, будзе таксама абсалютна збягацца на мностве X ?

8. Няхай шэраг $\sum v_k(x)$ збягаецца на мностве X і $u_k(x) \le v_k(x)$ $(x \in X,\ k=1,2,\ldots)$. Ці можна тады сцвярджаць, што шэраг $\sum u_k(x)$ заўсёды збягаецца на мностве X ?

9. Няхай $|u_k(x)| \le |v_k(x)|$ $(\forall x \in X,\ k=1,2,\ldots)$. Ці заўседы са збежнасці шэрагу $\sum v_k(x)$ на мностве X вынікае збежнасць на гэтым мностве шэрагу $\sum u_k(x)$?

10. Няхай шэраг $\sum v_k(x)$ абсалютна збягасцца на мностве X і яго складнікі задавальняюць на гэтым мностве ўмовы $|u_k(x)| \le |v_k(x)|$ $(k=1,2,\ldots)$. Ці можна тады сцвярджаць, што шэраг $\sum u_k(x)$ будзе абавязкова:

а) збягацца, б) абсалютна збягацца?

11. Ці можна сцвярджаць, што шэраг $\sum u_k(x)$ абсалютна збягаецца на мностве X, калі яго складнікі задавальняюць на гэтым мностве ўмовы $|u_k(x)| \le v_k(x)$ $(k=1,2,\ldots)$, прычым $\forall x \in X$ шэраг $\sum v_k(x)$ збягаецца?

12. Ці заўседы раўнамерна збягаецца на адрэзку $[a,b]$ шэраг $\sum u_k(x)$, калі ён задавальняе наступную ўмову:

$$\forall L>0 \quad \exists \nu_L \quad \forall n>\nu_L \quad \forall m>n \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{m} u_k(x)\right| < \frac{1}{L}.$$

13. Ці заўседы з раўнамернай збежнасці паслядоўнасці $(f_n(x))$ на мностве X, вынікае збежнасць гэтай паслядоўнасці на мностве X?

14. Ці можа шэраг $\sum u_k(x)$ збягацца раўнамерна на адрэзку $[a,b]$ і адначасова быць разбежным на нейкай частцы гэтага адрэзка ?

15. Ці існуюць збежныя на адрэзку $[a,b]$ шэрагі, якія раўнамерна збягаюцца толькі на некаторай частцы гэтага адрэзка?

16. Ці існуюць шэрагі, якія збягаюцца на мностве $X=(-\infty,+\infty)$, але не збягаюцца раўнамерна на X ?

17. Вядома, што паслядоўнасць $(f_n(x))$ збягаецца на $[a,b]$ і раўнамерна збягаецца на любым інтэрвале $(\alpha,\beta) \subset [a,b]$. Ці можна тады сцвярджаць, што $(f_n(x))$ раўнамерна збягаецца на адрэзку $[a,b]$?

18. Ці вынікае са збежнасці шэрагу $\sum u_k(x)$ на адрэзку $[a,b]$ і раўнамернай збежнасці гэтага шэрагу на любым інтэрвале $(\alpha,\beta) \subset [a,b]$ раўнамерная збежнасць шэрагу на ўсім адрэзку $[a,b]$?

19. Няхай на мностве X задавальняюцца ўмовы: $f_n(x) \rightrightarrows f(x),\ g_n(x) \rightrightarrows g(x)$

Ці можна тады сцвярджаць, што:

а) $f_n(x)+g_n(x) \rightrightarrows f(x)+g(x) \quad (x\in X)$,

б) $f_n(x)\cdot g_n(x) \rightrightarrows f(x)\cdot g(x) \quad (x\in X)$.

20. Няхай шэрагі $\sum u_k(x)$ і $\sum v_k(x)$ раўнамерна збягаюцца на мностве X. Ці можна тады сцвярджаць, што шэраг $\sum (u_k(x)+v_k(x))$ таксама раўнамерна збягаецца на гэтым мностве?

21. Ці можна выявіць раўнамерную збежнасць шэрагу на мностве X паводле прыметы Вейерштраса, калі вядома, што на гэтым мностве шэраг збягаецца ўмоўна?

22. Няхай раўнамерная збежнасць шэрагу $\sum u_k(x)$ на мностве X выяўлена паводле прыметы Вейерштраса. Ці можна тады сцвярджаць, што шэраг $\sum u_k(x)$ збягаецца абсалютна на мностве X ?

23. Няхай лікавы шэраг $\sum \sup\limits_{x\in X} |u_k(x)|$ разбягаецца. Ці можна тады сцвярджаць, што шэраг $\sum u_k(x)$ не збягаецца раўнамерна на мностве X ?

24. Няхай збежны на мностве X функцыйны шэраг $\sum u_k(x)$ не мае збежнага мажарантнага лікавага шэрагу. Ці вынікае адсюль, што шэраг $\sum u_k(x)$ заўсёды будзе збягацца нераўнамерна на мностве X ?

25. Вядома, што шэраг $\sum v_k(x)$ раўнамерна збягаецца на мностве X і яго складнікі задавальняюць на гэтым мностве ўмовы $|u_k(x)|<|v_k(x)|$. Ці вынікае адсюль раўнамерная збежнасць шэрагу $\sum u_k(x)$ на мностве X ?

26. Няхай шэраг $\sum v_k(x)$ раўнамерна і абсалютна збягаецца на мностве X. Ці можна тады сцвярджаць, што шэраг $\sum u_k(x)$ будзе таксама збягацца на гэтым мностве абсалютна і раўнамерна, калі $|u_k(x)| \le |v_k(x)| \quad (\forall x\in X,\ k=1,2,\dots)$?

27. Ці вынікае з абсалютнай збежнасці шэрагу на мностве X яго раўнамерная збежнасць на гэтым мностве?

28. Ці вынікае з раўнамернай збежнасці шэрагу на мностве X яго

абсалютная збежнасць на гэтым мностве?

29. Ці вынікае з абсалютнай і раўнамернай збежнасці шэрагу $\sum u_k(x)$ на мностве X раўнамерная збежнасць шэрагу $\sum |u_k(x)|$ на гэтым мностве?

30. Няхай шэраг $\sum |u_k(x)|$ збягаецца раўнамерна на мностве X. Ці можна тады сцвярджаць, што шэраг $\sum u_k(x)$ заўсёды раўнамерна збягаецца на мностве X ?

31. Няхай раўнамерная збежнасць на адрэзку $[a,b]$ шэрагу $\sum u_k(x)$ выяўлена паводле прыметы Вейерштраса, а паслядоўнасць $(V_n(x))$ задавальняе $\forall n$ умовы $|V_n(x)| \leq 1$ $\forall x \in [a,b]$. Ці можна тады сцвярджаць, што шэраг $\sum u_k(x) \cdot V_k(x)$ на адрэзку $[a,b]$:

а) збягаецца абсалютна;

б) збягаецца раўнамерна;

в) збягаецца абсалютна і раўнамерна.

32. Вядома, што складнікі шэрагу $\sum u_k(x)$ з'яўляюцца нарастальнымі функцыямі на адрэзку $[a,b]$ і шэраг абсалютна збягаецца ў пункце b . Ці вынікае адсюль раўнамерная збежнасць шэрагу $\sum u_k(x)$ на адрэзку $[a,b]$?

33. Няхай шэраг $\sum u_k(x)$ з непарыўнымі і дадатнымі на адрэзку $[a,b]$ складнікамі збягаецца і мае непарыўную на гэтым адрэзку суму. Ці вынікае адсюль раўнамерная збежнасць гэтага шэрагу на $[a,b]$?

34. Ці можна сцвярджаць, што шэраг $\sum u_k(x)$ з непарыўнымі і дадатнымі на інтэрвале (a,b) складнікамі збягаецца раўнамерна на гэтым інтэрвале, калі сума шэрагу ёсць непарыўная функцыя на інтэрвале (a,b) ?

35. Ці існуюць шэрагі з непарыўнымі на адрэзку $[a,b]$ складнікамі, якія маюць разрыўную суму на гэтым адрэзку?

36. Ці можа сума абсалютна збежнага на мностве X шэрагу $\sum u_k(x)$ з непарыўнымі складнікамі быць разрыўнай функцыяй на мностве X?

37. Ці можа сума раўнамерна збежнага на інтэрвале (a,b) шэрагу

$\sum u_k(x)$ з непарыўнымі складнікамі быць разрыўнай функцыяй на інтэрвале (a,b) ?

38. Ці можа лімітавая функцыя паслядоўнасці непарыўных на інтэрвале (a,b) функцый $f_n(x)$ быць разрыўнай на гэтым інтэрвале?

39. Ці ўсякі абсалютна збежны на адрэзку $[a,b]$ шэраг з дыферэнцавальнымі складнікамі можна:

а) паскладова інтэграваць на $[a,b]$,

б) паскладова дыферэнцаваць на $[a,b]$

40. Ці ўсякі раўнамерна збежны на адрэзку $[a,b]$ шэраг ■ дыферэнцавальнымі складнікамі можна:

а) паскладова інтэграваць на $[a,b]$,

б) паскладова дыферэнцаваць на $[a,b]$.

41. Ці вынікае ■ раўнамернай збежнасці на адрэзку $[a,b]$ шэрагу вытворных $\sum u_k'(x)$:

а) збежнасць шэрагу $\sum u_k(x)$ на $[a,b]$,

б) раўнамерная збежнасць шэрагу $\sum u_k(x)$ на $[a,b]$.

42. Няхай шэраг $\sum u_k(x)$ з непарыўнымі і дадатнымі на адрэзку $[a,b]$ складнікамі мае на гэтым адрэзку непарыўную суму $s(x)$. Ці можна тады паскладова інтэграваць гэты шэраг на адрэзку $[a,b]$?

43. Ці існуюць збежныя на адрэзку $[a,b]$ шэрагі з неінтэгравальнымі складнікамі, у якіх сума $s(x)$ з'яўляецца інтэгравальнай функцыяй на $[a,b]$?

44. Ці існуюць збежныя на адрэзку $[a,b]$ шэрагі ■ недыферэнцавальнымі складнікамі, у якіх сума $s(x)$ з'яўляецца дыферэнцавальнай на $[a,b]$?

45. Ці існуюць раўнамерна збежныя на адрэзку $[a,b]$ шэрагі з недыферэнцавальнымі складнікамі, у якіх сума $s(x)$ з'яўляецца дыферэнцавальнай функцыяй на $[a,b]$?

46. Няхай функцыя $f(x)$ раскладаецца ў ступеневы шэраг на інтэрвале $(-R,R)$. Ці можна тады сцвярджаць, што $f(x)$ з'яўляецца

бясконца дыферэнцавальнай на гэтым інтэрвале?

47. Ці ўсякая бясконца дыферэнцавальная на інтэрвале $(-R, R)$ функцыя $f(x)$ раскладаецца ў ступеневы шэраг на гэтым інтэрвале?

48. Ці існуюць функцыі $f(x)$, шэрагі Тэйлара якіх збягаюцца на некаторым інтэрвале $(-R, R)$ і маюць суму $S(x) \neq f(x)$ $\forall x \in (-R, R)$?

49. Ці існуе функцыя $f(x)$, шэраг Тэйлара якой збягаецца $\forall x$ і мае суму $S(x)$, прычым $f(x) = S(x)$, калі $x > 0$ і $f(x) \neq S(x)$, калі $x < 0$?

50. Сфармулюйце неабходную і дастатковую ўмову раскладальнасці функцыі ў ступеневы шэраг.

51. Няхай $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k/(k+1)!$. Знайдзіце наступныя вытворныя:

а) $f^{(10)}(0)$, б) $f^{(100)}(0)$.

52. Ці можа ступеневы шэраг $\sum a_k x^k$ збягацца толькі на:

а) адрэзку $[-1, 2]$;

б) адрэзку $[-2, 3]$.

53. Вядома, што ступеневы шэраг $\sum a_k (x-x_0)^k$ збягаецца толькі на паўінтэрвале $-1 < x \le 3$. Знайдзіце x_0 .

54. Няхай $\forall x \in (a, b)$ існуе $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Ці можа лімітавая функцыя $f(x)$ быць непарыўнай на інтэрвале (a, b) , калі вядома, што функцыі $f_n(x)$ з'яўляюцца разрыўнымі і паслядоўнасць $(f_n(x))$ збягаецца нераўнамерна на гэтым інтэрвале.

55. Няхай $\sum u_k(x) = S(x)$, $x \in (a, b)$. Ці можа сума шэрагу $S(x)$ быць непарыўнай на інтэрвале (a, b) , калі вядома, што складнікі шэрагу з'яўляюцца разрыўнымі і шэраг збягаецца нераўнамерна на гэтым інтэрвале?

56. Ці існуе нераўнамерна збежная на інтэрвале (a, b) паслядоўнасць усюды разрыўных функцый, якая мае непарыўную лімітавую функцыю на гэтым інтэрвале?

57. Ці існуе нераўнамерна збежны на інтэрвале (a, b) шэраг з усюды разрыўнымі складнікамі, які мае непарыўную суму на гэтым

інтэрвале?

58. Ці збягаюцца раўнамерна на дадзеным мностве X наступныя шэрагі:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 kx}{k(k+1)}$, $X=(-\infty,+\infty)$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{e^{kx}}$, $X=[1,2]$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2+x^2}$, $X=[1,+\infty)$; г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}$, $X=[0,1]$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ КОЛЛОКВИУМА НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ

1. Существуют ли функциональные ряды, областью сходимости которых являются:

а) только одна точка $x=a$,

б) только две точки $x=a$ и $x=b$ $(a\neq b)$,

в) два отрезка $[a,b]$ и $[c,d]$ $(a<b<c<d)$.

2. Существуют ли расходящиеся ряды $\sum u_k(x)$ и $\sum v_k(x)$ такие, что $\forall x$ сходится ряд:

а) $\sum (u_k(x)+v_k(x))$, б) $\sum u_k(x)\, v_k(x)$.

3. Пусть ряд $\sum u_k(x)$ сходится на множестве X, а ряд $\sum v_k(x)$—на множестве Y. Можно ли тогда утверждать, что ряд $\sum(u_k(x)+v_k(x))$обязательно сходится на множестве Z, где:

а) $Z=X\cap Y$, б) $Z=X\cup Y$.

4. Существуют ли ряды $\sum u_k(x)$ и $\sum v_k(x)$, множеством сходимости которых являются соответственно отрезки $[a,b]$ и $[b,c]$, такие, что множеством сходимости ряда $\sum(u_k(x)+v_k(x))$ будет отрезок $[a,c]$?

5. Пусть последовательность $(f_n(x))$ сходится на множестве X, а функция $\varphi(x)$ ограниченная на этом множестве. Обязательно ли тогда сходится на множестве X последовательность $(\varphi(x)\cdot f_n(x))$?

6. Пусть ряд $\sum u_k(x)$ сходится на множестве X, а функция $\varphi(x)$ ограниченная на этом множестве. Обязательно ли тогда сходится

на множестве X ряд $\sum \varphi(x) u_k(x)$?

7. Следует ли из абсолютной сходимости ряда $\sum u_k(x)$ на множестве X абсолютная сходимость ряда $\sum \varphi(x) u_k(x)$ на этом множестве, если $\varphi(x)$ является ограниченной на множестве X ?

8. Пусть ряд $\sum V_k(x)$ сходится на множестве X и $u_k(x) \le V_k(x)$ $(x \in X,\ k=1,2,\dots)$. Можно ли тогда утверждать, что ряд $\sum u_k(x)$ также сходится на множестве X ?

9. Пусть $|u_k(x)| \le |V_k(x)|$ $(x \in X,\ k=1,2\dots)$. Всегда ли из сходимости ряда $\sum V_k(x)$ на множестве X следует сходимость на этом множестве ряда $\sum u_k(x)$?

10. Пусть ряд $\sum V_k(x)$ абсолютно сходится на множестве X и его члены удовлетворяют на этом множестве условиям $|u_k(x)| \le |V_k(x)|$ $(k=1,2,\dots)$. Можно ли тогда утверждать, что ряд $\sum u_k(x)$ обязательно:

а) сходится; б) сходится абсолютно.

11. Можно ли утверждать, что ряд $\sum u_k(x)$ абсолютно сходится на множестве X, если его члены удовлетворяют на этом множестве условиям $|u_k(x)| \le V_k(x)$ $(k=1,2\dots)$, причем $\forall x \in X$ ряд $\sum V_k(x)$ сходится?

12. Всегда ли равномерно сходится на отрезке $[a,b]$ ряд $\sum u_k(x)$, если он удовлетворяет следующему условию:

$$\forall L>0 \quad \exists \nu_L \quad \forall n>\nu_L \quad \forall m>n \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{m} u_k(x)\right| < 1/L .$$

13. Всегда ли из равномерной сходимости последовательности $(f_n(x))$ на множестве X следует сходимость этой последовательности на множестве X ?

14. Может ли ряд $\sum u_k(x)$ быть равномерно сходящимся на отрезке $[a,b]$ и одновременно расходиться на некоторой части этого отрезка?

15. Существуют ли ряды, сходящиеся на отрезке $[a,b]$ и равномерно сходящиеся только на некоторой части этого отрезка?

16. Существуют ли ряды, сходящиеся на множестве $X=(-\infty,+\infty)$ и не сходящиеся равномерно на X ?

17. Известно, что последовательность $(f_n(x))$ сходится на $[a, b]$ и равномерно сходится на любом интервале $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$. Можно ли тогда утверждать, что $(f_n(x))$ равномерно сходится на отрезке $[a, b]$?

18. Следует ли из сходимости ряда $\sum u_k(x)$ на отрезке $[a, b]$ и равномерной сходимости этого ряда на любом интервале $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ равномерная сходимость ряда на всем отрезке $[a, b]$?

19. Пусть на множестве X удовлетворяются условия: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $g_n(x) \rightrightarrows g(x)$. Можно ли тогда утверждать, что:

а) $f_n(x) + g_n(x) \rightrightarrows f(x) + g(x) \quad (x \in X)$;

б) $f_n(x) \cdot g_n(x) \rightrightarrows f(x) \cdot g(x) \quad (x \in X)$.

20. Следует ли из равномерной сходимости рядов $\sum u_k(x)$ и $\sum v_k(x)$ на множестве X равномерная сходимость на этом множестве ряда $\sum (u_k(x) + v_k(x))$?

21. Применим ли признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов к условно сходящимся рядам?

22. Пусть равномерная сходимость ряда $\sum u_k(x)$ на множестве X установлена по признаку Вейерштрасса. Следует ли отсюда, что ряд $\sum u_k(x)$ сходится абсолютно на множестве X ?

23. Пусть числовой ряд $\sum \sup\limits_{x \in X} |u_k(x)|$ расходится. Можно ли тогда утверждать, что ряд $\sum u_k(x)$ сходится неравномерно на множестве X ?

24. Известно, что у сходящегося на множестве X функционального ряда $\sum u_k(x)$ не существует сходящегося мажорантного числового ряда. Можно ли утверждать тогда, что ряд $\sum u_k(x)$ обязательно сходится неравномерно на множестве X ?

25. Пусть ряд $\sum v_k(x)$ равномерно сходится на множестве X и его члены удовлетворяют на этом множестве условиям $|u_k(x)| < |v_k(x)|$. Следует ли отсюда равномерная сходимость ряда $\sum u_k(x)$ на множестве X ?

26. Пусть ряд $\sum v_k(x)$ равномерно и абсолютно сходится на

множестве X . Можно ли тогда утверждать, что ряд $\sum u_k(x)$ будет также сходится на этом множестве равномерно и абсолютно, если $|u_k(x)| \leq |v_k(x)|$ $(\forall x \in X,\ k=1,2,\ldots)$?

27. Следует ли из абсолютной сходимости ряда на множестве X его равномерная сходимость на этом множестве?

28. Следует ли из равномерной сходимости ряда на множестве его абсолютная сходимость на этом множестве?

29. Следует ли из абсолютной и равномерной сходимости ряда $\sum u_k(x)$ на множестве X равномерная сходимость ряда $\sum |u_k(x)|$ на этом множестве?

30. Следует ли из равномерной сходимости ряда $\sum |u_k(x)|$ на множестве X равномерная сходимость ряда $\sum u_k(x)$ на этом множестве?

31. Пусть равномерная сходимость ряда $\sum u_k(x)$ на отрезке $[a,b]$ установлена по признаку Вейерштрасса, а последовательность $(V_n(x))$ удовлетворяет $\forall n$ условиям $|V_n(x)| \leq 1$ $(a \leq x \leq b)$. Можно ли тогда утверждать, что ряд $\sum u_k(x) \cdot V_k(x)$ на отрезке $[a,b]$:

а) сходится абсолютно ;

б) сходится равномерно ;

в) сходится абсолютно и равномерно

32. Известно, что члены ряда $\sum u_k(x)$ являются возрастающими функциями на отрезке $[a,b]$ и ряд абсолютно сходится в точке b. Следует ли отсюда равномерная сходимость ряда $\sum u_k(x)$ на отрезке $[a,b]$?

33. Пусть ряд $\sum u_k(x)$ с непрерывными и положительными на отрезке $[a,b]$ членами имеет непрерывную на этом отрезке сумму. Следует ли из этого равномерная сходимость данного ряда на $[a,b]$?

34. Можно ли утверждать, что ряд $\sum u_k(x)$ с непрерывными и положительными на интервале (a,b) членами сходится равномерно на этом интервале, если сумма ряда непрерывна на интервале (a,b)?

35. Существуют ли ряды с непрерывными на отрезке $[a,b]$ членами, сумма которых разрывна на этом отрезке?

36. Может ли сумма абсолютно сходящегося на отрезке $[a,b]$ ряда $\sum u_k(x)$ с непрерывными членами быть разрывной на этом отрезке?

37. Может ли сумма равномерно сходящегося на интервале (a,b) ряда $\sum u_k(x)$ с непрерывными членами быть разрывной на этом интервале?

38. Может ли предельная функция последовательности непрерывных на интервале (a,b) функций быть разрывной на этом интервале?

39. Всякий ли абсолютно сходящийся на отрезке $[a,b]$ ряд с дифференцируемыми членами можно:

а) почленно интегрировать на $[a,b]$;

б) почленно дифференцировать на $[a,b]$.

40. Всякий ли равномерно сходящийся на отрезке $[a,b]$ ряд с дифференцируемыми членами можно:

а) почленно интегрировать на $[a,b]$;

б) почленно дифференцировать на $[a,b]$

41. Следует ли из равномерной сходимости на отрезке $[a,b]$ ряда производных $\sum u_k'(x)$

а) сходимость ряда $\sum u_k(x)$ на $[a,b]$;

б) равномерная сходимость ряда $\sum u_k(x)$ на $[a,b]$.

42. Пусть ряд $\sum u_k(x)$ с непрерывными и положительными на отрезке $[a,b]$ членами имеет на этом отрезке непрерывную сумму $s(x)$. Допускает ли этот ряд почленное интегрирование на отрезке $[a,b]$?

43. Существуют ли сходящиеся на отрезке $[a,b]$ ряды с неинтегрируемыми членами, у которых сумма $s(x)$ является интегрируемой на $[a,b]$?

44. Существуют ли сходящиеся на отрезке $[a,b]$ ряды с недифференцируемыми членами, у которых сумма $s(x)$ является дифференцируемой функцией?

45. Существуют ли равномерно сходящиеся на отрезке $[a,b]$ ряды

с недифференцируемыми членами, у которых сумма является дифференцируемой функцией?

46. Пусть функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд на интервале $(-R, R)$. Можно ли утверждать тогда, что $f(x)$ является бесконечно дифференцируемой на этом интервале?

47. Всякая ли бесконечно дифференцируемая на интервале $(-R, R)$ функция $f(x)$ раскладывается в степенной ряд на этом интервале?

48. Существует ли функция $f(x)$, ряд Тейлора которой сходится на некотором интервале $(-R, R)$ и имеет сумму $S(x) \neq f(x)$ $\forall x \in (-R, R)$?

49. Существует ли функция $f(x)$, ряд Тейлора которой сходится $\forall x$ и имеет сумму $S(x)$, причем $f(x) = S(x)$, если $x > C$ и $f(x) \neq S(x)$, если $x < C$?

50. Укажите необходимое и достаточное условие разложимости функции в степенной ряд.

51. Пусть $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/(k+1)!$ $(-\infty < x < \infty)$. Найдите следующие значения производных:

а) $f^{(10)}(0)$, б) $f^{(100)}(0)$

52. Может ли степенной ряд $\sum a_k x^k$ сходиться только на:

а) отрезке $[-1, 2]$, б) отрезке $[-2, 3]$

53. Известно, что степенной ряд $\sum a_k (x - x_0)^k$ сходится только на полуинтервале $-1 < x \leq 3$. Определите x_0.

54. Пусть $\forall x \in (a, b)$ существует $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$. Может ли предельная функция $f(x)$ быть непрерывной на интервале (a, b), если известно, что функции $f_n(x)$ разрывны и $(f_n(x))$ сходятся неравномерно на этом интервале?

55. Пусть $\sum u_k(x) = S(x)$ $(a < x < b)$. Может ли сумма ряда $S(x)$ быть непрерывной на интервале (a, b), если члены ряда разрывны и ряд сходится неравномерно на этом интервале?

56. Существует ли неравномерно сходящаяся на интервале (a, b) последовательность всюду разрывных функций, которая имеет

непрерывную предельную функцию на этом интервале?

57. Существует ли неравномерно сходящийся на интервале (a,b) ряд со всюду разрывными членами, сумма которого непрерывна на этом интервале?

58. Сходятся ли равномерно на данном множестве X следующие ряды:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 kx}{k\sqrt{k+1}}$, $X=(-\infty,+\infty)$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{e^{kx}}$, $X=[1,2]$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^3+x^2}$, $X=[1,+\infty)$; г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k/_{k+x}$, $X=[0,1]$.

АДКАЗЫ, ПАРАДЫ, РАШЭННІ

п.1. с.7.

а) $-1 < x \leq 1$, б) $-\infty < x < +\infty$, в) $x = 0$, г) $-\infty < x < -1$,

д) $x \neq \pm 1$; е) $-\infty < x < +\infty$. Парада: скарыстайце прымету Дырыхле збежнасці шэрагаў, ж) $-3 \leq x \leq 3$.

п. 2.7 с.18-19

1. Парада: скарыстайце азначэнне раўнамернай збежнасці паслядоўнасці.

2. Парада: скарыстайце азначэнне раўнамернай збежнасці паслядоўнасці і судачыненне $|f_n g_n - f\cdot g| \leq |f_n - f| g_n + |g_n - g| f$.

3. Напрыклад, $f_n(x) = g_n(x) = x + 1/n$, $X = \mathbb{R}$

6. а) збягаецца раўнамерна, б) збягаецца нераўнамерна,

в) збягаецца раўнамерна, г) збягаецца нераўнамерна,

д) збягаецца нераўнамерна.

8. а), б) не, 9. не, 10. а) напрыклад, $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$, $X = (0,1)$.

п. 3.2 с.24-26

1. Парада: скарыстайце крытэрый Кашы раўнамернай збежнасці шэрагаў.

2. Парада: скарыстайце прымету Вейерштраса і няроўнасць $|u_n(x)| \leq q^n \quad \forall x \in X$

3. Парада: скарыстайце крытэрый Кашы раўнамернай збежнасці шэрагаў.

5. Парада: скарыстайце крытэрый Кашы раўнамернай збежнасці шэрагаў.

6. Парада: а) $u_k(x) = \frac{1}{(k-1)x+1} - \frac{1}{kx+1}$, б) $u_k(x) = \frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1}$.

8. Парада: Паводле тэарэмы Лейбніца n-я астача знакачаргавальнага шэрагу $\sum(-1)^k a_k$ $|r_n| < a_{n+1}$.

9. а) збягаецца раўнамерна, б) збягаецца раўнамерна. Парада: скарыстайце ацэнку астачы знакачаргавальнага шэрагу Лейбніца

(гл. папярэдні прыклад N 8).

11. Парада: скарыстайце прымету Дырыхле-Хардзі пры $0<\alpha\le 1$ і прымету Вейерштраса пры $\alpha>1$.

12. Парада: скарыстайце прымету Абеля-Хардзі.

п. 3.3 с.27

1. $f(x)=1$, калі $x\neq 0$, $f(0)=0$

п. 3.5 с.32-34

1. $\frac{1}{e}<x\le e$.

2. Няхай $f(x)\cdot \ln^2 3=\sum_{k=1}^{\infty}3^{-nx}=1/(3^x-1)$ $(x>0)$. Гэты шэраг можна пакладова дыферэнцаваць (чаму?) на $[\alpha,+\infty)$, $(\alpha>0)$. тады $f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^{nx}}=\frac{3^x(3^x+1)}{(3^x-1)^3}$, значыць $\sum_{n=1}^{\infty}n^2/3^n=f''(1)=3/2$.

3. Парада: скарыстайце дыферэнцаванне шэрагу $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-nx}$. Адказ: 3.

5. $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Парада: калі б шэраг збягаўся пры $x\neq k\pi$, то паводле неабходнай умовы збежнасці мелі б: $\lim_{n\to\infty}\sin nx=0$, а тады з роўнасці $\sin(n+1)x-\sin(n-1)x=2\sin x\cdot\cos nx$ вынікала б умова: $\lim_{n\to\infty}\cos nx=0$, што немагчыма, паколькі $\sin^2 nx+\cos^2 nx=1$.

6. Калі б шэраг збягаўся ў пункце x_0, то адсюль вынікала б, што $\lim_{n\to\infty}\cos nx_0=0$, а тады б $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-\cos 2nx_0)=1/2$, але $\frac{1}{2}(1-\cos 2nx_0)=\sin^2 nx_0=1-\cos^2 nx_0$

7. а) паколькі $\frac{1}{1-x^n}-\frac{1}{1-x^{n+1}}=\frac{x^{n-1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}(x-x^2)$, то n-я частковая сума дадзенага шэрагу

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(1-x^k)(1-x^{k+1})}=\frac{1}{x-x^2}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{n+2}}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{x-x^2}\left(\frac{1}{1-x}-1\right)=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

8. $-\infty<x<+\infty$. Парада: дакажыце, што $\forall x$ задавальняюцца ўмовы тэарэмы Лейбніца аб збежнасці знакачаргавальных шэрагаў.

10. а),б) скарыстайце тэарэму аб непарыўнасці лімітавай функцыі.

11. а) $x>0$, б) $-\infty<x<+\infty$, в) шэраг разбягаецца $\forall x$, г) $x>1$.

12. Парада: скарыстайце прымету Вейерштраса.

13. Парада: запісаўшы шэраг у выглядзе $\sum c_n/n^{x_0}\cdot 1/n^{x-x_0}$, скарыстайце тэарэму Абеля-Хардзі.

14. Напрыклад,

$$a_n(x)=\begin{cases} 0\ , & \text{калі } 0 \le x \le 1/2^{n-1}, \\ \frac{1}{n}\sin^2 2^{n+1}\pi x, & \text{калі } 2^{-n-1} < x < 2^{-n}, \\ \ , & \text{калі } 2^{-n} \le x \le 1. \end{cases}$$

15. Разгледзьце прыклад: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(1-x)\,x^k \quad (0 \le x \le 1)$.

<u>п. 4.2 с.37-38</u>

1. а) $R=0,\ x=0$; б) $R=1,\ -1 \le x < 1$; в) $R=2,\ -2 \le x < 2$;
   г) $R=6,\ -6 < x < 6$

2. а) $|x|<1$, б) $-\infty < x < +\infty$, в) $|x|<4$, г) $|x|<1$

3. а) $R=1/2$, б) $R=1/e$, в) $R=1$

<u>п. 4.5 с.42</u>

1. а) $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $|x|<1$ б) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $|x|<1$, в) $\dfrac{2}{(1-x)^3}$, $|x|<1$

Парада: шэраг збягаецца на інтэрвале $(-1,+1)$. Няхай $S(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k(k+1)\,x^{k-1}$ $(|x|<1)$. Інтэгруем пакладова і атрымліваем:

$$\int_0^x S(t)\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x k(k+1)\,t^{k-1}dt=\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\,x^k=1/(1-x)^2$$

(гл. прыклад 2 п. 4.5). Калі лічыць суму шэрагу $\sum(k+1)\,x^k$ невядомай, то патрэбна інтэграваць атрыманы шэраг яшчэ раз.

2. а) $\ln 2$. Парада: дакажыце шляхам пакладовага дыферэнцавання, што $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k/_{k\cdot 2^k}=\ln 2-\ln(2-x)$, $|x|<1$.

   б) $\ln 3-\ln 2$. Парада: скарыстайце ступеневы шэраг $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^k}x^k=\ln(2+x)-\ln 2$, суму якога атрымайце шляхам пакладовага дыферэнцавання.

   в) $\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\ln 2\right)$. Парада: дакажыце папярэдне, што

$$x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^{10}}{10}+\ldots=\int_0^x\frac{dt}{1+t^3}=\frac{1}{3}\ln\frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{3}}{2-x}.$$

<u>п. 6.11 с.64-66</u>

1. а) $1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{x^3}{48}+\ldots$, б) $x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{8}+\ldots$,
   в) $e\left(1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{4x^4}{4!}+\ldots\right)$, г) $x+x^2-\dfrac{x^3}{3}+\ldots$

2. а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\ldots\right]$, б) $1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\ldots$,
   в) $\ln 3+\dfrac{1}{3}(x-1)-\dfrac{1}{3^2}\dfrac{(x-1)^2}{2}+\ldots$

3. Шэраг Маклорэна мае выгляд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k x^k$, дзе $a_k=\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Знаходзім першую вытворную: $f'(x) = 1/(1+x^2)$ або $(1+x^2)f'(x) = 1$.
Скарыстаўшы формулу Лейбніца для n - й вытворнай левай часткі апошняй роўнасці, атрымліваем пры $n \geq 2$:

$$(1+x^2)\, f^{(n+1)}(x) + n\cdot 2x\cdot f^{(n)}(x) + \tfrac{1}{2} n(n-1)\cdot 2\, f^{(n-1)}(x) = 0$$

Адсюль пры $x = 0$ маем: $f^{(n+1)}(0) + n(n-1) f^{(n)}(0) = 0$.

З атрыманага судачынення, улічваючы значэнне $f'(0) = 1$, паслядоўна знаходзім: $f^{(3)}(0) = -2!$, $f^{(5)}(0) = 4!$, . . . , $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k (2k)!$.
Паколькі $f''(0) = 0$, то з таго ж судачынення вынікае, што $f^{(2k)}(0) = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$.

Такім чынам,

$$a_{2k} = \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} = 0, \qquad a_{2k+1} = \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} = (-1)^k \frac{(2k)!}{(2k+1)!} = (-1)^k \frac{1}{2k+1}$$

А тады шэраг Маклорэна набывае выгляд:

$$x - x^3/3 + x^5/5 + \dots + (-1)^k\, x^{2k+1}/(2k+1) + \dots$$

4. Парада: Маем: $f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ або $\sqrt{1-x^2}\, f'(x) = 1$. Дыферэнцуем апошняе судачыненне і знаходзім: $\sqrt{1-x^2}\, f''(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} f'(x) = 0$ або $(1-x^2) f''(x) - x f'(x) = 0$. Адкуль паводле формулы Лейбніца для n - й вытворнай левай часткі апошняга судачынення атрымліваем роўнасць:

$$(1-x^2) f^{(n+2)}(x) - n\cdot 2x\, f^{(n+1)}(x) - \frac{n(n-1)}{2!} 2 f^{(n)}(x) - x f^{(n+1)}(x) - n f^{(n)}(x) = 0,$$

Тады пры $x = 0$ маем:

$$f^{(n+2)}(0) - n^2 f^{(n)}(0) = 0.$$

Улічваючы, што $f'(0) = 1$, знаходзім паслядоўна:

$f'''(0) = 1$, $f^{(5)}(0) = 3\cdot 3$, $f^{(7)}(0) = 5\cdot 5\cdot 3\cdot 3$, $f^{(9)}(0) = 7\cdot 7\cdot 5\cdot 5\cdot 3\cdot 3$ і г. д.

Адпаведна ўсе цотныя вытворныя $f^{(2n)}(0) = 0$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$.

Адказ: $x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \dots$

5. а) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} x^n$, $(-\infty < x < +\infty)$. Парада: $2^x = e^{x\ln 2}$,

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\, 2^{k-1} x^{2k}/(2k)!$, $(|x| < \infty)$. Парада: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$;

в) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (7k+1) x^k / 2^{k+2}$, $(|x| < 2)$. Парада: $\frac{3x+1}{(x-2)^2} = -(3x+1)\cdot\left(\frac{1}{x-2}\right)'$;

г) $-\sum\limits_{k=0}^{\infty} (1 + 1/2^k) x^k$ $(|x| < 1)$. Парада: $\frac{3x-4}{x^2-3x+2} = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1-x/2}$;

д) $2\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^{2k+1}/(2k+1)$, $(|x|<1)$, е). $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (1 + 1/2^k) \frac{x^k}{k} + \ln 2$ $(-1 < x \leq 1)$

Парада: $\ln(x^2+3x+2) = \ln 2 + \ln(1+x/2) + \ln(1+x)$,

ж) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{4k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ $(-\infty<x<+\infty)$. Парада: $\sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x$,

з) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (k+2)\frac{2^{2k+2}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ $(-\infty<x<+\infty)$,

і) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} x^{2k-2}/k!$ $(-\infty<x<+\infty)$.

6. а) Паколькі $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$, то $e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}/k!$, $\forall t$.

Пакладовым інтэграваннем шэрагу атрымліваем:

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)\cdot k!,$$

б) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}$ $(-\infty<x<+\infty)$, в) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)(2k)!}$ $(-\infty<x<+\infty)$.

7. а) e^2, б) $\sqrt[3]{e}-1$, в) $\sin 1$, г) $\cos 1/\sqrt{3}$,

д) $\ln 2$. Парада: $\ln(1+x)$ пры $x=1$,

е) $\pi/4$. Парада: $\operatorname{arctg} x$ пры $x=1$.

8. а) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (x-3)^k/3^{k+1}$. Парада: $\frac{1}{x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}$,

б) $-\sum_{k=0}^{\infty}(x+2)^k/2^{k+1}$.

9. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi^{2k}}{4^{2k}}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}(x-2)^{2k}$ $(-\infty<x<+\infty)$. Парада: $\sin\frac{\pi x}{4} = \cos\frac{\pi}{4}(x-2)$

10. а) $e^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}(x+2)^k/k!$. Парада: $e^x = e^{-2}\cdot e^{x+2}$,

б) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (x+2)^{2k}/3^{k+1}$. Парада: $\frac{1}{x^2+4x+7} = \frac{1}{3\left[1+\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2\right]}$

11. а) -5040, б) $\frac{105}{6}$, в) $\frac{10!}{4!}$.

12. а) Паводле формулы Маклорэна

$$\sin(a+x) = \sin a + \cos a\cdot x - \sin a\cdot\frac{x^2}{2!} - \cos a\cdot\frac{x^3}{3!} + \sin a\cdot\frac{x^4}{4!} + \cos a\cdot\frac{x^5}{5!} + \ldots =$$
$$= \sin a\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right) + \cos a\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right) = \sin a\cdot\cos x + \cos a\cdot\sin x$$

13. $\sum_{k=1}^{\infty}k^2 x^{k-1}$; 12.

14. а) $x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{23}{45}x^6 + \ldots$, б) $1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots$,

в) $x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + \cdots$

15. а) $\frac{1}{1-x^2} - 1 = x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$ $|x|<1$.

Значыць, $\sin\left(\frac{1}{1-x^2}-1\right) = (x^2+x^4+x^6+\ldots) - \frac{1}{3!}(x^2+x^4+x^6+\ldots)^3 + \frac{1}{5!}(x^2+x^4+x^6+\ldots) + \ldots =$

$= x^2+x^4+x^6+x^8+\ldots - \frac{1}{3!}x^6 - \frac{1}{3!}x^8 + \ldots = x^2 + x^4 + \frac{5}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^8 + \ldots$

б) Паколькі

$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \cdots$; $\ln(1+t) = t - t^2/2 + t^3/3 - \ldots$ $(|t|<1)$,

то

$$\ln(1+\sin x) = \left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\right) - \frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\right)^3 + \ldots =$$
$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \ldots$$

ЗМЕСТ

Вучэбнае выданне

Чупрыгін Алег Аляксандравіч

МАТЭМАТЫЧНЫ АНАЛІЗ: ФУНКЦЫЙНЫЯ ШЭРАГІ

Вучэбна-метадычны дапаможнік па аднайменнаму курсу для студэнтаў фізічнага факультэта

Рэдактар *Г. А. Пушня*
Тэхнічны рэдактар *І. П. Ціханава*
Карэктар *А. В. Брусіненка*

Падпісана ў друк 06.10.98. Фармат 60×84/16. Папера афсетная. Друк афсетны.
Ум. друк. арк. 5,5. Ул.-выд. арк. 4,4. Тыраж 100 экз. Заказ 712

Аддрукавана ў Выдавецкім цэнтры БДУ.
Беларускі дзяржаўны універсітэт. Ліцэнзія ЛВ № 315 ад 14.07.98.
220050, Мінск, пр. Ф. Скарыны, 4.